99

P.-S. de Laplace

Ensayo filosófico sobre las posibilidades

Grandes Obras del Pensamiento

Pierre-Simon de

LAPLACE

Ensayo filosófico sobre las posibilidades

Alianza

Pierre-Simon de

LAPLACE

Ensayo filosófico sobre las posibilidades

Altaya

Título original:
Essai philosophique sur les probabilités

Título en castellano:
Ensayo filosófico sobre las probabilidades

Traducción, introducción y notas:
Pilar Castrillo

Dirección editorial: Julià de Jòdar
Director de producción: Manuel Álvarez
Diseño de la colección: Víctor Vilaseca

Distribuye para España: Marco Ibérica. Distribución de Ediciones, S.A.
Ctra. de Irún, km. 13.350 (Variante de Fuencarral) - 28034 Madrid
Distribuye para México: Distribuidora Intermex S.A. de C.V.
Lucio Blanco, 435 - Col. Petrolera 02400 México D.F.
Distribuye para Argentina: Capital Federal: Vaccaro Sánchez
C/ Moreno, 794 - 9º piso - CP 1091 Capital Federal - Buenos Aires (Argentina)
Interior: Distribuidora Bertran - Av. Vélez Sarsfield, 1950
CP 1285 Capital Federal - Buenos Aires (Argentina)
Importación Argentina: Rei Argentina, S.A.
Moreno 3362/64 - 1209 Buenos Aires - Argentina

© de la traducción, introducción y notas: Pilar Castrillo
© Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1985
© Por esta edición: Ediciones Altaya, S.A., 1995
Musitu, 15. 08023 Barcelona

ISBN Obra Completa: 84-487-0119-4
ISBN: 84-487-0088-0
Depósito Legal: B. 26.287/1995
Impreso en España - Printed in Spain - Enero 1996
Imprime: Litografía Rosés, S.A. (Barcelona)
Encuadernación: S. Mármol, S.A. (Sabadell-Barcelona)

Reservados todos los derechos. De conformidad con lo dispuesto en el artículo 534-bis del código penal vigente, podrán ser castigados con penas de multa y privación de libertad quienes reprodujesen o plagiaren, en todo o en parte, una obra literaria, artística o científica fijada en cualquier tipo de soporte, sin la perceptiva autorización.

¡Oh, matemáticas santas, ojalá podáis, por vuestro comercio perpetuo, consolar el resto de mis días de la maldad del hombre y de la injusticia del Gran Todo!

LAUTRÉAMONT

Introducción

La segunda mitad del siglo XVIII es, sin duda, el período más destacado de toda la historia del pensamiento francés. Por una parte, es, en efecto, la época en que un buen número de pensadores y filósofos se agrupan en torno a las figuras de D'Alembert y Diderot para llevar a cabo el magno proyecto de publicar la Enciclopedia, entendida como un compendio de todos los conocimientos de la época, incluidas tanto las llamadas «artes mecánicas» como las «liberales», pero, además, por otra, es el momento en que Francia logra, en el plano científico, una hegemonía sobre el resto de las naciones europeas que hasta ahora nunca había tenido y luego no volverá a tener. Para darnos cuenta de que, efectivamente, ésta es la época dorada de la ciencia francesa basta tan sólo con que recordemos que es en ella cuando J. L. Lagrange racionalizó del todo la ciencia de la mecánica, P. S. Laplace transformó la astronomía en mecánica celeste, Lavoisier modernizó la química reemplazando la teoría del flogisto por una teoría de la combustión y G. Buffon sentó las bases de la moderna ciencia bioló-

gicas estableciendo una nueva clasificación de las especies naturales. Es evidente que la comunidad científica francesa no había logrado reunir nunca, a lo largo de toda su historia, una pléyade de científicos semejante ni contribuir, por tanto, al desarrollo de la ciencia en la medida en que lo hizo en esta época, en la que no sólo logró dar un empuje notable a disciplinas ya existentes, sino que también contribuyó en gran medida a la prefiguración de otras nuevas.

Uno de los factores que más contribuyó a que se produjera este auge de la ciencia francesa posiblemente sea la institucionalización a que ésta, al igual que el resto de la sociedad francesa, se vio sometida en este período en el que se crearon instituciones tan prestigiosas como l'Ecole Polytechnique (que congrega, entre maestros y discípulos, a hombres tan importantes como A. M. Legendre, J. Fourier, S. Carnot y S. Poisson, entre otros), L'Ecole Normale y el Institut de France. La creación de estas instituciones, a las que se desplazó el centro de actividad de la ciencia que hasta ahora había tenido su sede en l'Academie Royale des Sciences de París, favoreció, sin duda, el profesionalismo en el modo de hacer ciencia que distingue a los grandes científicos de esta época, no sólo fomentando la rivalidad entre ellos por tratar de ocupar los puestos más importantes dentro de las mismas, sino —lo que es más importante— facilitando un contacto y comunicación entre ellos casi permanentes.

Dentro de esta comunidad científica, destaca entre otras la figura de Pierre Simon de Laplace, uno de los científicos más notables de todos los tiempos, no sólo por sus contribuciones a la ciencia exacta, sino también por el punto de vista filosófico que desarrolló en la presentación de sus trabajos y por el papel que desempeñó en la configuración de disciplinas científicas nuevas. Aunque su universal curiosidad le llevó a hacer incursiones en casi todas las áreas de conocimiento vigentes en su tiempo, sus principales esfuerzos se concentraron en dos, la mecánica clásica y la probabilidad, una concerniente

al mundo real, la otra a nuestros procedimientos para conocerlo.

Sus investigaciones en el primero de estos campos son de sobra conocidas. El principal resultado de su labor en él fue demostrar que el sistema solar es un mecanismo autorregulador en el que todas las irregularidades se corrigen. Newton había observado anomalías en los movimientos de Júpiter y Saturno que le resultaron inexplicables, llevándole a pensar en la necesidad de Dios para corregirlas. Laplace demostró, en primer lugar, que la aparente aceleración del movimiento de la luna era un fenómeno de autorrectificación y, en segundo lugar, que las grandes variaciones en los movimientos de Júpiter y Saturno no eran sino resultado de su interacción gravitatoria y acababan autocorrigiéndose, llegando a la conclusión de que el sistema era estable y Dios una hipótesis innecesaria. Estos resultados, expuestos primero en su *Exposition du systeme du monde* y luego en su gran *Traité de Mécanique Céleste,* obra en cinco volúmenes aparecidos entre 1798 y 1825, contribuyeron a extender la idea de que la ley newtoniana del inverso del cuadrado para la variación de la fuerza gravitatoria con respecto a la distancia era la ley fundamental del universo. El mundo parecía completamente determinado y comprensible en términos de este modelo. Tan arraigada estaba esta idea en la mente de Laplace que llegó a escribir —precisamente en la obra que nos ocupa— el célebre pasaje siguiente:

«Una inteligencia que, en un momento determinado, conociera todas las fuerzas que animan la naturaleza, así como la situación respectiva de los seres que la componen, si además fuera lo suficientemente amplia como para someter a análisis tales datos, podría abarcar en una sola fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo y los del átomo más ligero; nada le resultaría incierto y tanto el futuro como el pasado estarían presentes a sus ojos.»

Este pasaje, presentado siempre como la máxima ex-

presión del espíritu determinista de la época, continúa, sin embargo, del siguiente modo:

«El espíritu humano ofrece, en la perfección que ha sabido dar a la astronomía, un débil esbozo de esta inteligencia. Sus descubrimientos en mecánica y geometría junto con el de la gravitación universal le han puestò en condiciones de abarcar en las mismas expresiones analíticas los estados pasados y futuros del sistema del mundo... Todos sus esfuerzos por buscar la verdad tienden a aproximarlo continuamente a la inteligencia que acabamos de imaginar, pero de la que siempre permanecerá infinitamente alejado».

Y es que Laplace, al lado de una firme concepción determinista acerca de la naturaleza humana, de todos conocida, mantuvo la no menos firme, aunque sí mucho más desconocida, convicción de que la posibilidad de alcanzar la certeza absoluta está completamente cerrada para el hombre que lo más que puede aspirar a lograr alcanzar es el conocimiento meramente probable. Es esta convicción la que le lleva a emprender sus estudios sobre el tema de la probabilidad, según confiesa en una memoria, presentada a la Academia de Ciencias poco antes de su ingreso en ella y titulada *Recherches sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies et sur leur usage dans la théorie des hasards,* en la que escribe:

«Para él (el hombre) hay por tanto muchas cosas que son inciertas y algunas que son más o menos probables. En vista de la imposibilidad de conocerlas todas, he tratado de compensar esto determinando distintos grados de apariencia, de suerte que debemos a la debilidad de la mente humana una de las más delicadas e ingeniosas teorías matemáticas: la ciencia del azar («chance») o probabilidad». (P. S. Laplace, *Oeuvres Complètes* (14 vols., París, 1878-1912), VIII, p. 114.)

Aunque los estudios laplacianos van a tener, como luego veremos, una importancia capital en la constitución de la teoría de las probabilidades como rama de la matemática, no es, sin embargo, Laplace el primero en

dedicar sus esfuerzos a trabajar en este campo, sino que se trata de un terreno ya abonado por otros, si bien es cierto que no con demasiada anterioridad a él. En efecto, aunque la idea de regularidad en la estructura de los acontecimientos surgió relativamente pronto en la mente humana, como no podía menos de ocurrir dadas las muchas ocasiones que el hombre había tenido de observarla en sus juegos de dados o de tabas, y aunque lo lógico hubiera sido, por tanto, que la formulación de algunas ideas acerca de dicha regularidad no se hubiera hecho esperar demasiado, lo cierto es, sin embargo, que la teoría del azar tardó mucho en aparecer, posiblemente debido, entre otras cosas, a la poderosa influencia ejercida por las ideas religiosas, según las cuales todo sucede por designio divino, siendo casi impío suponer que los acontecimientos puedan estar sujetos a las ciegas leyes de la probabilidad. Y así, aunque la primera formulación explícita del concepto de leyes del azar se debe al famoso matemático y físico Gerónimo Cardano, y aunque también se conserva un fragmento de Galileo que pone de manifiesto que comprendió claramente el método de la suerte en los dados, los inicios del cálculo de probabilidades no los encontramos, sin embargo, hasta el trabajo de Huygens, *De ratiociniis in ludo aleae,* de 1658, la correspondencia entre los grandes matemáticos Pascal y Fermat en 1654 y, sobre todo, el *Ars Conjectandi,* de Jacques Bernouilli, del que se puede decir que constituye, si exceptuamos el de De Moivre, el principal tratado escrito sobre el tema hasta la obra laplaciana.

La obra publicada por Laplace en este campo guarda un cierto paralelismo con la por él realizada en el de la mecánica clásica. En efecto, además de una obra de divulgación, el *Essai Philosophique sur les probabilités,* de la que luego hablaremos, Laplace publicó también, en 1812, esto es, un siglo después del de Bernouilli, un gran tratado, titulado *Théorie Analytique des probabili-*

tés, que constituye la *Summa* de este primer período de la historia de las probabilidades. Al igual que ocurre con la *Mecánique céleste,* este tratado es un compendio del trabajo realizado por Laplace anteriormente y contenido en una serie de memorias presentadas ante la Academia de Ciencias en el período comprendido entre 1770, fecha en la que contaba veintiún años, y el momento de la supresión de la misma. Acerca de estas memorias en las que, prácticamente, logra Laplace establecer sus resultados más importantes en las dos áreas en las que trabajó de forma preferente, escribe Concorcet en el prefacio al volumen que recoge las memorias por él presentadas a la Academia antes de su ingreso en ella (*Mémoires de mathematique et de physique présentés a l'Academie Royale des Sciences par divers savants* 6 (1774), p. 19): «Nunca había recibido esta Academia de un candidato tan joven en tan breve tiempo tantos importantes trabajos sobre temas tan variados y difíciles». Condorcet se está refiriendo en concreto a las trece memorias que presentó entre 1770 y 1773 sobre temas tan diversos como la adaptación del cálculo integral a la solución de ecuaciones diferenciales, la expansión de ecuaciones diferenciales de una sola variable en series recurrentes y de más de una en series recurro-recurrentes, la aplicación de estas técnicas a la teoría de los juegos de azar, etcétera...

Por lo que al tema de la probabilidad se refiere, las memorias relevantes publicadas con anterioridad a su gran tratado son nueve: una primera, publicada en la sociedad real de Turín, cuatro publicadas en las series suplementarias de la Academia de Ciencias de París (SE), y otras cuatro publicadas, siendo ya miembro de la misma, en los volúmenes anuales de la Academia (MARS). La fecha de presentación de estas memorias indica claramente que el tema de la probabilidad fue para Laplace objeto de interés ya desde muy temprano, a pesar de que, como hemos visto, su obra principal en este campo sea relativamente tardía dentro del conjunto de su obra.

La importancia de la labor realizada por Laplace en

este campo difícilmente podría exagerarse. De ella se ha dicho alguna vez, no sin razón, que encierra, si no mayor virtuosismo matemático, sí mayor originalidad que la realizada en el ámbito de la mecánica. Así, por ejemplo, Poisson, otro de los matemáticos con quienes el cálculo de probabilidades está más en deuda, hace el siguiente juicio de valor acerca de la misma:

«Sin duda, Laplace se ha mostrado un hombre de genio en la mecánica celeste; él es quien ha dado muestras de la más penetrante sagacidad para descubrir las causas de los fenómenos; él es, asimismo, quien ha hallado la causa de la aceleración del movimiento de la luna y la de las grandes irregularidades de Júpiter y Saturno que Euler y Lagrange habían buscado infructuosamente. Pero se puede decir que donde sobre todo se ha revelado como un gran geómetra es en el cálculo de probabilidades, pues son las numerosas aplicaciones que ha hecho de este cálculo las que han dado lugar al cálculo de las diferencias finitas parciales, a su método para la reducción de ciertas integrales a series y a lo que se ha denominado la teoría de las *funciones generatrices*» (Poisson, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* II, p. 396).

En efecto, en sus manos, la teoría del azar se convirtió en la rama del análisis conocida con el nombre de cálculo o teoría de las probabilidades, pudiendo decirse que él es quien en realidad constituyó el tema al exponer juntos los principales tópicos de la teoría del azar, ya tratados antes por muchos matemáticos, y otros pertenecientes a nuevas áreas de aplicación como la astronomía, la geodesia, la demografía, la filosofía de la ciencia, etc. Y es que Laplace no se limita a proseguir la obra realizada por sus antecesores en el campo de los problemas pertenecientes a la categoría de las probabilidades discontinuas, esto es, en el campo de los problemas que se pueden plantear a propósito de los juegos de azar, y a ocuparse de problemas de probabilidades continuas o geométricas, como es el caso del tratado por Buffon, en los que el número de casos posibles es igual

al número de posiciones posibles de un punto sobre un plano o al número de posiciones de una recta en el espacio, sino que también introduce el importante tema de la probabilidad de las causas de los acontecimientos, ~~únicamente~~ abordado antes de él por el clérigo inglés Bayes, que es el primero en formular una regla conocida, ~~por~~ esta razón, con el nombre de «regla de Bayes».

Determinar la probabilidad de las causas por los acontecimientos constituye el objeto de la primera de las memorias laplacianas de carácter filosófico, la titulada *Mémoire sur la probabilité des causes par les évènements,* publicada en SE 6 (1774), pp. 612-656. Allí describe ésta como «una materia nueva desde muchos puntos de vista y que merece ser cultivada tanto más cuanto que es principalmente bajo este punto de vista como la ciencia del azar puede ser útil en la vida civil» (*Ibid.,* p. 622).(La incertidumbre en el conocimiento tiene, en efecto, que ver, bien con los acontecimientos, bien con sus causas. Si se sabe que una urna contiene cierto número de bolas blancas y negras en una determinada proporción y se desea conocer la probabilidad de extraer una bola blanca, entonces la causa es conocida y es el acontecimiento lo que resulta incierto. Pero si, por el contrario, no se conoce dicha proporción, y después de extraer una bola blanca se ha de decir la probabilidad de que sea como la que media entre p y q, entonces se puede decir que se conoce el efecto, pero no la causa) Pues bien, todos los problemas de la teoría del azar pueden ser clasificados dentro de alguna de estas dos categorías. Es a la segunda de ellas, que incluye todo aquel tipo de problemas en los que, conociendo un acontecimiento se trata de determinar la probabilidad de acontecimientos anteriores desconocidos vinculados con él, a la que Laplace dedica su interesante memoria, en la que establece y ejemplifica la «regla de Bayes» que él formula del siguiente modo en la *Théorie Analytique:*

«Si un acontecimiento observado puede resultar de n causas distintas, sus probabilidades respectivas son como las probabilidades del acontecimiento inferidas de su existencia, siendo la probabilidad de cada una de ellas una fracción cuyo numerador es la probabilidad del acontecimiento en la hipótesis de la existencia de la causa y cuyo denominador es la suma de las probabilidades similares relativas a todas las causas» (*Oeuvres Completes,* VII, p. 183).

Fue precisamente este principio de la probabilidad inversa o regla de Bayes el que le llevó a mantener su confianza en la matemática como instrumento de mejora política y social, a la vista de la multiplicidad de campos en los que en principio resultaba aplicable. Conviene precisar de todos modos que no parece que Laplace mostrara demasiado interés por estas aplicaciones cuando empezó a interesarse por el tema de la probabilidad, al que él se sintió atraído por motivos puramente matemáticos, y que no fue sino más tarde, a raíz de sus contactos con Condorcet, hombre de confianza del ministro Turgot y ferviente defensor de la idea de progreso, cuando empezó a interesarse poco a poco por ellas. El primer tipo de problemas que lograron llamar su atención fueron los problemas de población, en los que, por tratarse de casos numéricos, vio una magnífica oportunidad para aplicar su técnica relativa a la determinación de los límites de la probabilidad de acontecimientos sobre la base de la experiencia pasada. Más tarde fue ampliado progresivamente el ámbito de sus preocupaciones, interesándose por la aplicación de la probabilidad a temas tan diversos como las decisiones de los cuerpos representativos, los procedimientos electorales, la credibilidad de los testigos y la fiabilidad de los tribunales de justicia. El pensaba que de lo que se trataba en todos estos casos era de conocer las causas de los acontecimientos con el fin de corregir lo que él llama las «causas falsas», entendiendo por tales aquellas que producen acontecimientos que no se conforman a los principios de moralidad y de justicia, a los que considera, en el orden social, el equivalente de la ley de la gravitación en el orden físico (Laplace, *Oeuvres Complètes,* XIV, p. 173).

De lo dicho se desprende, pues, que la introducción de este tema de la probabilidad de las causas constituye sin ningún género de dudas, una de sus mayores aportaciones en este campo, ya que abrió nuevas sendas en la consideración de la probabilidad que, de este modo, sirve para evaluar la aceptabilidad de afirmaciones hipotéticas en cualquier campo de la investigación y también en las decisiones prácticas. Aunque esto resulta innegable, sin embargo, Laplace —y esta es posiblemente la limitación más importante de su pensamiento en este terreno—, condicionado seguramente por su concepción determinista del universo, no pasó nunca de este tratamiento causal a un tratamiento estadístico de los acontecimientos; sus estimaciones versan sobre la probabilidad de que estemos o no equivocados en relación con las causas de los fenómenos, y no sobre las configuraciones de los propios datos. Para decirlo en la terminología acuñada más tarde por Cournot, su concepción determinista no le permitió pasar de una probabilidad subjetiva a una probabilidad objetiva que propiciara una concepción estadística de los fenómenos y, por eso, dado el hipotético ser, invocado por él, capaz de conocer y registrar todos los datos del universo en un momento determinado, la probabilidad desaparecería por falta de objeto para dejar paso a una explicación puramente mecánica del mismo.

No es ésta, sin embargo, la única contribución realmente importante de Laplace en este campo. A él le corresponde también el mérito de haber descubierto y demostrado el papel desempeñado por la distribución normal en la teoría matemática de la probabilidad. Las aportaciones efectuadas por él en esta línea pueden cifrarse en dos: por un lado, la creación de un método para lograr aproximaciones de una integral normal; por otro, su descubrimiento y demostración de lo que ahora se llama el «teorema central del límite». En 1781, Laplace ideó, en efecto, un método que expuso en su *Mémoire sur les probabilités* (*Oeuvres Complètes,* IX, páginas 383-485) que más tarde —concretamente en su

memoria *Sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres* (*Ibid.*, X, pp. 209-2991, sec. 6)— le permitió lograr aproximaciones de diversas distribuciones de probabilidad, de tipo contínuo o discreto, surgidas de los juegos de azar y de otros tipos de problemas. Pero, además de esto, con su enunciación y demostración del teorema central del límite, contenidas en su *Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres et sur leur application aux probabilités* (*Ibid.*, XII, pp. 301-345), Laplace logra establecer una justificación de la ley del error, ya demostrada antes por Gauss, como límite de la distribución de la suma de n errores aleatorios independientes según $n \to \infty$ cuando la aportación relativa de cada uno de esos errores a la suma de todos ellos tiende a 0 según n aumenta, con lo cual quedaba sentada una sólida base sobre la que apoyar el método de los mínimos cuadrados.

La obra laplaciana contiene también el germen de muchas otras ideas, como la estimación de intervalos de confianza y el contraste de hipótesis (por no poner más que un par de ejemplos), que no han sido desarrolladas hasta años relativamente cercanos, entre otras razones porque, después de Laplace, el interés por la teoría de la probabilidad, a pesar de las útiles aplicaciones que se estaban haciendo de ella, decayó hasta que a mediados de siglo Maxwell llamó de nuevo la atención sobre ella, al destacar su importancia para la mecánica estadística.

Pasando ya al *Ensayo filosófico sobre las probabilidades,* el origen de esta obra está en un curso de diez lecciones que dio Laplace en L'Ecole Normale de París en 1795, siendo miembro de un comité para seleccionar profesores. De estas diez lecciones, las ocho primeras se ocupan de matemática elemental (aritmética, álgebra, geometría plana, trigonometría y los aspectos más elementales de la geometría analítica), la novena describe el sistema métrico y la décima introduce el tema de la

probabilidad, resumiendo en lenguaje no técnico los resultados más destacados a que se había llegado en este campo. Laplace publicó inicialmente esta lección con el título de *Notice sur les probabilités,* presentando más tarde al Institut de France una versión ampliada de la misma. Esta versión, junto con una memoria acerca de la probabilidad de los testimonios, que había presentado ante el Instituto ese mismo año de 1814, fueron recogidos en la segunda edición de la *Théorie Analytique,* que se reedita por esta misma fecha, la primera como Introducción y la segunda como capítulo 11. Ese mismo año, dicha Introducción se publica por separado con el título de *Essai philosophique sur les probabilités,* conociendo desde entonces unas cuantas ediciones.

El *Ensayo* se abre con unas páginas, quizás demasiado breves, dedicadas a hacer algunas observaciones generales acerca de la probabilidad, así como una exposición de los principios más elementales de esta teoría. Estas páginas se prolongan en una segunda sección, titulada «Los métodos analíticos del cálculo de probabilidades», que, por el contrario, habríamos de juzgar o bien insuficiente o bien innecesaria, según que el hipotético lector conozca ya o no las matemáticas que allí se exponen, pues en ella se emprende la imposible tarea de exponer en lenguaje ordinario los abstrusos procesos matemáticos de la teoría de la probabilidad que están pidiendo a gritos el formalismo.

A continuación, y dentro ya del apartado dedicado a las aplicaciones del cálculo de probabilidades, después de algunas referencias a los juegos y a las desigualdades que pueden existir entre posibilidades supuestamente iguales, incluye Laplace una sección dedicada a la exposición de las leyes de la probabilidad que resultan de la aplicación indefinida de los acontecimientos o, lo que es lo mismo, a la consideración del teorema de Jacques Bernouilli y de sus consecuencias. Algunas de las reflexiones aquí contenidas parecen dirigidas al caído emperador Napoleón, a quien había dedicado la primera edición de su *Théorie Analytique,* siendo mucho más explícita esta alusión en la tercera edición, en la que podemos leer lo siguiente: «Ved, en cambio, a qué abismos de desgracia se han visto precipitados multitud de veces los pueblos por la ambición y la perfidia de sus jefes. Siempre que una gran potencia, incitada por el amor a las conquistas aspira a la dominación universal, el sentimiento de independencia produce en las naciones amenazadas una coalición de la que aquella se convierte casi siempre en víctima» (*Théorie Analytique,* 1820, página XLIII).

La siguiente sección, titulada «Del cálculo de probabilidades aplicado a la investigación de los fenómenos y de sus causas», se halla dedicada a la exposición de este tema, de cuya importancia ya hemos dado cuenta antes. En ella empieza Laplace confesando que es esta teoría de las probabilidades la que le indujo a emprender muchas de sus investigaciones en astronomía para luego pasar a exponer algunas de sus principales aportaciones en este campo. Pero si esta sección es importante, la siguiente no lo es menos aún por cuanto que en ella se aborda la consideración del método de los «mínimos cuadrados» para determinar el valor medio de una serie de observaciones, tema éste en el que, si bien ya habían trabajado antes D. Bernouilli y, sobre todo, Legendre y Gauss, Laplace hizo, como antes hemos visto, una importante aportación al haber logrado derivar dicho método de la teoría de probabilidades.

Los tres siguientes capítulos, que no son sino una reproducción de los resultados expuestos en los capítulos VIII, IX y II de la *Théorie Analytique* relativos a las aplicaciones de la teoría de la probabilidad en algunos otros campos, dan paso a una irónica sección dedicada a las ilusiones en la estimación de las probabilidades, donde, entre otras cosas, Laplace hace una serie de observaciones acerca de la aparente verificación de adivinaciones y predicciones de toda laya, que resultan de suma actualidad en los tiempos que corren tan propensos a conferir credibilidad a todo tipo de anticipaciones del futuro, vengan de donde vinieren. Tras una breve

sección dedicada a los distintos medios de acercarse a la certeza y en la que Laplace hace algunas interesantes observaciones acerca de la inducción, el libro se cierra con una breve pero interesante noticia histórica de la teoría de la probabilidad, dando cuenta de su importancia y pronosticando (en este caso, con fundamento para ello) el gran papel que estaba llamada a desempeñar en un futuro que es ya presente.

PILAR CASTRILLO CRIADO

Este Ensayo filosófico es el desarrollo de una lección que di en 1795 sobre las probabilidades en las Escuelas Normales, de las que fui designado profesor, y que apareció en el *Journal* de las sesiones de dichas escuelas. Poco después he publicado sobre este mismo tema una obra que lleva por título *Théorie analytique des Probabilités*. Lo que aquí voy a hacer es exponer, sin el auxilio del análisis, los principios y resultados generales de esta Teoría, aplicándolos a los problemas más importantes de la vida, la mayor parte de los cuales no son sino problemas de probabilidad. Se verá, no sin interés, que aun cuando en los principios eternos de la razón, la justicia y la humanidad, sólo se consideren las probabilidades favorables que constantemente les acompañan, tiene una gran ventaja el seguirlos y graves inconvenientes el apartarse de ellos por la razón de que dichas probabilidades, lo mismo que las que resultan agraciadas en las loterías, acaban siempre por prevalecer en medio de las oscilaciones del azar. Me gustaría que las reflexiones diseminadas por este Ensayo fuesen merecedoras de

la atención de los filósofos y lograran dirigirla hacia un objeto tan digno de sus desvelos.

De la probabilidad

Todos los acontecimientos, incluso aquellos que por su insignificancia parecen no atenerse a las grandes leyes de la naturaleza, no son sino una secuencia tan necesaria como las revoluciones del sol. Al ignorar los lazos que los unen al sistema total del universo, se los ha hecho depender de causas finales o del azar, según que ocurrieran o se sucedieran con regularidad o sin orden aparente, pero estas causas imaginarias han ido siendo descartadas a medida que se han ido ampliando las fronteras de nuestro conocimiento, y desaparecen por completo ante la sana filosofía que no ve en ellas más que la expresión de nuestra ignorancia de las verdaderas causas [1].

Los acontecimientos actuales mantienen con los que les preceden una relación basada en el principio evidente

1 Laplace expone por primera vez su concepción probabilista del conocimiento, frente a la concepción más bien determinista de la naturaleza en cuya defensa se había destacado, en la cuarta de las memorias que dedica al tema de la probabilidad, presentada ante la Academia de Ciencias de París en 1773, poco antes de su ingreso en ella, y titulada *Recherches sur l'intégration des équations of différentielles aux differences finies et sur leur usage dans la théorie des hasards* (*Oeuvres Complètes*, VIII, pp. 279-321). En ella escribe, en efecto, por primera vez: «Debemos a la debilidad de la mente humana una de las teorías más delicadas e ingeniosas: la ciencia del azar (chance) o de las probabilidades» (*Ibid.*, p. 114). Más tarde, vuelve a ocuparse de nuevo de este tema del estatuto epistemológico de la probabilidad en la segunda parte de su *Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres*, en donde encontramos un párrafo similar a este del *Ensayo* que dice así: «La palabra azar (chance) sólo expresa, por tanto, nuestra ignorancia de las causas de los fenómenos que observamos que ocurren y se suceden sin ningún orden aparente. La probabilidad es relativa en parte a nuestra ignorancia y en parte a nuestro conocimiento» (*O. C.*, X, p. 296).

de que una cosa no puede comenzar a existir sin una causa que la produzca. Este axioma, conocido con el nombre de *principio de razón suficiente*, se extiende incluso a las acciones más indiferentes. La voluntad más libre no puede producirlas sin un motivo determinante, pues si, siendo absolutamente iguales todas las circunstancias de dos situaciones, actuara en una y dejara de hacerlo en la otra, su elección sería un efecto sin causa y ella sería entonces, como dice Leibniz, el azar ciego de los epicúreos. La opinión contraria es una ilusión del espíritu que, perdiendo de vista las fugaces razones de la elección de la voluntad en las cosas indiferentes, se persuade de que ella se ha determinado por sí misma y sin estar motivada por nada.

Así pues, hemos de considerar el estado actual del universo como el efecto de su estado anterior y como la causa del que ha de seguirle. Una inteligencia que en un momento determinado conociera todas las fuerzas que animan a la naturaleza, así como la situación respectiva de los seres que la componen, si además fuera lo suficientemente amplia como para someter a análisis tales datos, podría abarcar en una sola fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo y los del átomo más ligero; nada le resultaría incierto y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos [2]. El espíritu humano ofrece, en la perfección que ha sabido dar a la astronomía, un débil esbozo de esta inteligencia. Sus descubrimientos en mecánica y geometría, junto con el de la gravitación universal, le han puesto en condiciones de abarcar en las mismas expre-

2 En este célebre pasaje, Laplace extrapola a todos los fenómenos de la naturaleza el determinismo de la mecánica clásica, en la que, como es sabido, el estado de un sistema en un tiempo cualquiera se halla determinado únicamente por el estado del mismo en algún tiempo inicial. Laplace piensa que para que este ideal determinista pueda extenderse a todos los cuerpos y fenómenos del universo, basta con suponer una inteligencia infinita capaz de tener en cuenta todas las propiedades de los mismos, dando, naturalmente, por supuesto que existe una dependencia funcional entre ellas.

siones analíticas los estados pasados y futuros del sistema del mundo. Aplicando el mismo método a algunos otros objetos de su conocimiento, ha logrado reducir a leyes generales los fenómenos observados y a prever aquellos otros que deben producirse en ciertas circunstancias. Todos sus esfuerzos por buscar la verdad tienden a aproximarlo continuamente a la inteligencia que acabamos de imaginar, pero de la que siempre permanecerá infinitamente alejado. Esta tendencia, propia de la especie humana, es la que la hace superior a los animales, y sus progresos en este ámbito, lo que distingue a las naciones y los siglos y cimenta su verdadera gloria.

Recordemos que en un tiempo distinto y todavía no muy lejano, una lluvia o una sequía excesivas, un cometa que arrastrara tras él una cola muy amplia, los eclipses, las auroras boreales y, en general, todos los fenómenos extraordinarios, eran considerados como signos de la cólera celeste. Se invocaba al cielo para conjurar su funesta influencia. No se le pedía que suspendiera el curso de los planetas y del sol: la observación hubiera hecho sentir enseguida la inutilidad de tales súplicas. Pero como estos fenómenos parecían contrariar el orden de la naturaleza, dado que se presentaban y desaparecían con largos intervalos de tiempo, se suponía que el cielo los producía y los alteraba a su antojo con objeto de castigar los crímenes de la tierra. Así, la larga cola del cometa que apareció en 1456 [3] difundió el terror por una Europa ya consternada por los rápidos avances de los turcos que acababan de derribar el Bajo Imperio, y el papa Calixto ordenó que se dijeran oraciones en las que se con-

[3] Se trata del cometa Halley que luego, a raíz de su aparición en 1682, estudiaría Halley y que por eso se lo llama por su nombre. Edmund Halley presentó, en efecto, el año 1694, a la *Royal Society* un trabajo en el que mantenía que dicho cometa era el mismo que el que en otro tiempo se había acercado a la tierra, provocando lo que constituyó el diluvio universal. Halley no se atrevió a publicar este trabajo hasta 1724 por temor a que sus teorías fueran consideradas ofensivas para la religión, como ocurrió, en efecto, a juzgar por los ataques de que fueron objeto por parte del obispo y filósofo Berkeley.

juraran ambas cosas: el cometa y los turcos. Este astro, tras cuatro de sus revoluciones, ha suscitado entre nosotros un interés bien distinto. El conocimiento de las leyes del sistema del mundo, adquirido durante este tiempo, había disipado el temor producido por la ignorancia de las verdaderas relaciones del hombre con el universo, y Halley, habiendo establecido la identidad de este cometa con los de los años 1531, 1607 y 1682, anunció su siguiente retorno para finales de 1758 o principios de 1759. El mundo científico esperó con impaciencia dicho retorno, pues éste debía confirmar uno de los mayores descubrimientos que se hubieran hecho en las ciencias y realizar la predicción que hiciera Séneca cuando, hablando de la revolución de estos astros que descienden desde una gran distancia, dijo: «Llegará el día en que, gracias a un estudio continuo durante varios siglos, las cosas actualmente ocultas se presentarán con toda evidencia, y la posteridad se asombrará de que verdades tan palpables hayan escapado a nuestra comprensión». Clairaut se propuso entonces someter a análisis las perturbaciones ocasionadas en el cometa por la acción de los dos planetas más grandes, Júpiter y Saturno; después de interminables cálculos, fijó su paso por el perihelio para comienzos de abril de 1759, cosa que la observación no tardó en verificar. La regularidad que la astronomía nos muestra en el movimiento de los cometas tiene lugar, sin ningún género de dudas, en todos los fenómenos. La curva descrita por una simple molécula de aire o de vapor está determinada de una forma tan exacta como las órbitas de los planetas. Entre ellas no hay más diferencia que la derivada de nuestra ignorancia.

La probabilidad es relativa en parte a esta ignorancia y en parte a nuestros conocimientos. Sabemos que de tres o más acontecimientos sólo debe ocurrir uno, pero nada induce a creer que ocurrirá uno de ellos más bien que los otros. En este estado de indecisión nos resulta imposible pronunciarnos con certeza sobre su acaecimiento. Sin embargo, es probable que uno de estos aconte-

cimientos, tomado arbitrariamente, no acaezca, pues vemos varios casos igual de posibles que excluyen su acaecimiento, mientras que sólo uno lo favorece.

La teoría del azar consiste en reducir todos los acontecimientos del mismo tipo a un cierto número de casos igualmente posibles, es decir, tales que estemos igual de indecisos respecto a su existencia, y en determinar el número de casos favorables al acontecimiento cuya probabilidad se busca. La proporción entre este número y el de todos los casos posibles es la medida de esta probabilidad, que no es, pues, más que una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador el de todos los posibles [4].

Esta noción de probabilidad supone que, si se hace crecer en la misma proporción el número de casos favorables y el de todos los casos posibles, la probabilidad se mantiene idéntica. Para convencernos de ello, consideremos dos urnas A y B, la primera de las cuales contiene cuatro bolas blancas y dos negras, y la segunda únicamente dos blancas y una negra. Podemos imaginar las dos bolas negras de la primera urna atadas por un hilo que se rompe en el momento en que se toma una de ellas y las cuatro bolas blancas formando dos sistemas similares. Todos los casos que propicien una de las bolas del sistema negro harán salir una bola negra. Si se supone ahora que los hilos que unen las bolas no se rompen, no hay duda de que el número de casos posibles no cambiará, como tampoco el de casos favorables a la extracción de bolas negras, solo que se sacarán de la urna dos bolas a la vez, con lo que la probabilidad de extraer de la urna una bola negra será la misma que

[4] Tenemos aquí una clara formulación de la definición del concepto de probabilidad que más tarde iba a universalizarse. Laplace la introduce por primera vez en su *Mémoire sur les suites récurro-récurrentes et sur leurs usages dans la théorie des hasards* —primera de las publicadas sobre este tema por la Academia de París—, después de su desarrollo del método de las series recurrentes y antes de la aplicación de las mismas al juego entre dos jugadores (*Oeuvres Complètes*, VIII, pp. 10-11).

antes. Pero entonces estamos, evidentemente, ante el caso de la urna B, con la única diferencia de que las tres bolas de esta urna son reemplazadas por tres sistemas de dos bolas invariablemente unidas. Los casos igualmente posibles no son aquí las extracciones de bolas, sino las oportunidades propicias, cuya cantidad, que se supone la misma para cada urna, se reparte entre seis bolas en la primera y entre tres en la segunda.

Cuando todos los casos son favorables a un acontecimiento, su probabilidad se convierte en certeza y su expresión resulta igual a la unidad. En este sentido, la certeza y la probabilidad resultan comparables, aun cuando exista una diferencia esencial entre estos dos estados del espíritu, cuando una verdad le es rigurosamente demostrada y cuando percibe aún una pequeña fuente de error.

En las cosas que no son más que verosímiles, la diferencia entre los datos que cada hombre tiene respecto a ellas es una de las principales causas de la diversidad de las opiniones que imperan acerca de los mismos objetos. Supongamos, por ejemplo, que tenemos tres urnas de las cuales una no contiene más que bolas negras, mientras que en las otras dos hay sólo bolas blancas. Se saca una bola de la urna C y se desea saber la probabilidad de que esta bola sea negra. Si se ignora cuál es aquella de las tres urnas que no contiene más que bolas negras, de suerte que no haya ninguna razón para creer que es C más bien que B o A, estas tres hipótesis parecerán igualmente posibles y como una bola negra no puede ser extraída más que en la primera, la probabilidad de extraerla es igual a 1/3. Si se sabe que la urna A sólo contiene bolas blancas, la incertidumbre no afecta entonces más que a las urnas B y C, y la probabilidad de que la bola extraída de la urna C sea negra es 1/2. Por último, esta probabilidad se convierte en certeza cuando se está seguro de que las urnas A y B no contienen más que bolas blancas.

Así es como un mismo hecho, narrado ante una concurrida asamblea, logra diversos grados de credibilidad,

según la amplitud de conocimientos de los oyentes. Si el hombre que lo cuenta está íntimamente persuadido de su verdad y si por su condición y temperamento inspira gran confianza, su narración, por extraordinaria que sea, tendrá entre los oyentes de escasas luces el mismo grado de verosimilitud que un hecho corriente narrado por el mismo hombre, y le prestarán una fe absoluta. Sin embargo, si alguno de ellos hubiese tenido ocasión de enterarse de que el mismo hecho era rechazado por otros hombres igual de respetables, no dejará de dudar; y el hecho será juzgado falso por los oyentes ilustrados que lo encontrarán contrario, bien a los hechos bien establecidos, bien a las leyes inmutables de la naturaleza.

La propagación de estos errores que, en tiempos de ignorancia, han cubierto la faz de la tierra, se debe a la influencia de la opinión de aquellos que la muchedumbre considera más preparados y en quienes suele depositar su confianza en lo que se refiere a los asuntos más importantes de la vida. La astrología nos ofrece un buen ejemplo. Estos errores, inculcados en la infancia, adoptados sin examen y sin otra base que la creencia universal, se han mantenido durante mucho tiempo, hasta que por fin el progreso de las ciencias los ha erradicado del espíritu de los hombres ilustrados, cuya opinión los ha hecho desaparecer después del pueblo mismo gracias al poder de la imitación y de la costumbre que con tanta generalidad los había difundido. Este poder, el resorte más potente del mundo moral, establece y preserva en toda una nación ideas enteramente contrarias a las que, con igual dominio, mantiene en otro sitio. ¡Qué tolerancia no habrá que tener hacia las opiniones distintas de las nuestras, cuando esta diferencia no depende generalmente de otra cosa que de los distintos puntos de vista en que las circunstancias nos han colocado! Enseñemos a los que no consideramos suficientemente instruidos, pero no sin antes examinar rigurosamente nuestras propias opiniones y sopesar con imparcialidad sus probabilidades respectivas.

La diferencia de opiniones depende también de la manera en que cada uno determina la influencia de los datos que conoce. La teoría de las probabilidades obedece a consideraciones tan delicadas que no es raro que, partiendo de los mismos datos, dos personas lleguen a resultados distintos, sobre todo en las cuestiones más complejas. Expongamos aquí los principios generales de esta teoría.

Principios generales del cálculo de probabilidades

Primer Principio

El primero de estos principios es la definición misma de probabilidad que, como hemos visto, es la razón entre el número de casos favorables y el de todos los casos posibles.

Segundo Principio

Pero esto supone que los distintos casos son igualmente posibles. Si no lo son, habrá que determinar primero sus posibilidades respectivas, cuya justa valoración constituye uno de los puntos más delicados de la teoría del azar. La probabilidad será entonces la suma de las posibilidades de cada caso favorable. Aclaremos este principio con un ejemplo.

Supongamos que se arroja al aire una moneda grande y muy delgada cuyas dos grandes caras opuestas, a las que llamaremos *cara* y *cruz,* son perfectamente iguales. Busquemos la probabilidad de obtener *cara* al menos una vez en dos tiradas. Es evidente que pueden ocurrir cuatro casos igualmente posibles, a saber, *cara* en la primera y en la segunda tirada; *cara* en la primera y *cruz* en la segunda, *cruz* en la primera y *cara* en la segunda y *cruz* en las dos. Los tres primeros casos son favorables al evento cuya probabilidad se busca, la cual es, por consiguiente, igual a 3/4; de suerte que cabe apostar tres contra uno a que saldrá *cara* al menos una vez en dos tiradas.

En este juego no cabe distinguir más que tres casos distintos, a saber: *cara* en la primera tirada, lo cual exime de intentar una segunda; *cruz* en la primera tirada y *cara* en la segunda, y, por último, *cruz* en la primera y en la segunda tiradas. Esto reduciría la probabilidad a 2/3, si se considerara, con D'Alembert, que estos tres casos son igualmente posibles. Pero es obvio que la probabilidad de sacar *cara* en la primera tirada es 1/2, mientras que la de los otros dos casos es 1/4. El primer caso es un evento simple que corresponde a los dos eventos compuestos, *cara* en la primera y en la segunda tiradas, y *cara* en la primera, *cruz* en la segunda. Ahora bien, si, de acuerdo con el segundo principio, se añade la posibilidad 1/2 de sacar *cara* en la primera tirada a la posibilidad 1/4 de que salga *cruz* en la primera tirada y *cara* en la segunda, tendremos que la probabilidad buscada es de 3/4, resultado que concuerda con el obtenido en la suposición de que se hagan las dos tiradas. Esta suposición no cambia para nada la suerte del que apuesta por este evento: sirve únicamente para reducir los distintos casos a casos igualmente posibles.

Tercer Principio

Uno de los aspectos más importantes de la Teoría de Probabilidades, y el que a más ilusiones se presta, es la forma en que las probabilidades aumentan o disminuyen merced a sus combinaciones mutuas. Si los eventos son independientes unos de otros, la probabilidad de la existencia de su conjunto es el producto de sus probabilidades particulares. Así, como la probabilidad de sacar un as con un solo dado es de 1/6, la de sacar dos ases arrojando dos dados a la vez es de 1/36. En efecto, al poder cada una de las caras de uno combinarse con las seis del otro, hay treinta y seis casos igualmente posibles, de los cuales sólo uno da dos ases. En general, la probabilidad de que, dadas las mismas circunstancias, un evento simple se repita un número dado de veces es igual a la probabilidad de dicho evento simple elevada a la potencia indicada por dicho número. Así, como las

potencias sucesivas de una fracción menor que la unidad disminuyen sin cesar, un evento que dependa de una serie de probabilidades muy grandes, puede convertirse en muy poco verosímil. Supongamos que llega a nosotros un hecho transmitido por veinte testigos, de manera que el primero se lo ha transmitido al segundo, el segundo al tercero, y así sucesivamente. Supongamos también que la probabilidad de cada testimonio es igual a 9/10: la del hecho será menor que 1/8, es decir, habrá más de siete posibilidades contra una de que sea falso. Esta disminución de la probabilidad con lo que resulta más comparable es con la desaparición de la nitidez de los objetos por la interposición de varios trozos de vidrio; un número de trozos no demasiado elevado basta para impedir la vista de un objeto que un solo trozo permite percibir claramente. Los historiadores no parecen haber prestado suficiente atención a esta degradación de la probabilidad de los hechos cuando se los contempla a través de un gran número de generaciones sucesivas; muchos acontecimientos históricos, tenidos por ciertos, resultarían cuando menos dudosos, si se los sometiera a dicha prueba.

En las ciencias puramente matemáticas, las consecuencias más remotas participan de la certeza del principio del que derivan. En las aplicaciones del análisis a la física, las consecuencias tienen toda la certeza de los hechos o de las experiencias. Pero en las ciencias morales, en las que cada consecuencia sólo se deduce de lo que la precede de una manera verosímil, por probables que sean las deducciones, las posibilidades de error crecen con su número, llegando incluso, en el caso de las consecuencias más alejadas del principio, a sobrepasar a las de verdad.

Cuarto Principio

Cuando dos eventos dependen uno de otro, la probabilidad del evento compuesto es el producto de la probabilidad del primero por la probabilidad de que, habiendo sucedido éste, tenga lugar el otro. Así, en el caso

anterior de las tres urnas, A, B, C, dos de las cuales no contienen más que bolas blancas y una negra, la probabilidad de sacar una bola blanca de la urna C es 2/3, puesto que de tres urnas, dos contienen sólo bolas de este color. Pero, una vez extraída una bola blanca de la urna C, como la incertidumbre relativa a aquella urna que no contiene más que bolas negras ya no afecta más que a las urnas A y B, la probabilidad de extraer una bola blanca de la urna B es 1/2, siendo por tanto el producto de 2/3 por 1/2, es decir 1/3, la probabilidad de extraer a la vez de las urnas B y C dos bolas blancas.

Este ejemplo permite ver la influencia de los acontecimientos pasados en la probabilidad de los futuros. Pues la probabilidad de extraer una sola blanca de la urna B, que en un principio es de 2/3 se reduce a 1/2, una vez que se ha extraído una bola blanca de la urna C, y se transformaría en certeza si se hubiera extraído una bola negra de la misma urna. Esta influencia se podrá determinar por medio del siguiente principio, que no es sino un corolario del anterior.

Quinto Principio

Si se calculan *a priori* la probabilidad de un evento acaecido y la probabilidad de un evento compuesto de éste y de otro que se espera, la segunda probabilidad dividida por la primera constituirá la probabilidad del evento esperado, inferida del observado.

Se presenta aquí la cuestión, debatida por algunos filósofos, relativa a la influencia del pasado sobre la probabilidad del futuro. Supongamos que en el juego de *cara* o *cruz,* aparece *cara* más frecuentemente que *cruz.* Este solo hecho nos induciría a creer que en la constitución de la moneda interviene una causa constante que la favorece. De igual modo, en la conducta de la vida, la dicha constante es una prueba de habilidad, la cual no puede menos de seleccionar preferentemente a las personas felices. Pero si la inestabilidad de las circunstancias nos lleva incesantemente a un estado de incertidumbre absoluta; si, por ejemplo, en el juego de *cara* o *cruz,* uno

cambia de moneda a cada jugada, el pasado no puede arrojar luz alguna sobre el futuro, y sería absurdo tenerlo en cuenta.

Sexto Principio

Cada una de las causas a la que puede atribuirse un acontecimiento observado se halla indicada con una verosimilitud tanto mayor cuanto más probable sea que ocurra el acontecimiento si se supone existente dicha causa. La probabilidad de la existencia de cualquiera de estas causas es, pues, una fracción cuyo numerador es la probabilidad del acontecimiento resultante de la causa en cuestión y cuyo denominador es la suma de las probabilidades semejantes relativas a todas las causas [5]. Si estas distintas causas, consideradas *a priori,* son desigualmente probables, entonces, en lugar de la probabilidad del acontecimiento resultante de cada causa, debemos emplear el producto de dicha probabilidad por la de la causa misma. Este es el principio fundamental de la rama del análisis del azar que consiste en remontarse de los acontecimientos a las causas.

Este principio constituye el fundamento por el que los acontecimientos regulares se atribuyen a una causa concreta. Algunos filósofos han creído que estos acontecimientos son menos probables que los otros y que, por ejemplo, en el juego de *cara* o *cruz,* la combinación en la que sale cara veinte veces seguidas es menos fácil para la naturaleza que aquellas otras en que *cara* y *cruz* aparecen entremezcladas de forma irregular. Pero esta opinión supone que los acontecimientos pasados influyen

5 Como en ocasiones anteriores, no es ésta la primera vez que Laplace enuncia esta regla, sino que ya lo habían hecho en su *Mémoire sur la probabilité des causes par les évènements* (*Oeuvres Complètes,* VIII, pp. 27-65). Se trata de la llamada «regla de Bayes», por ser él el primero en formularla, aunque de forma no muy clara, en un trabajo publicado en las *Philosophical Transactions* de la Royal Society, el año 1763. Laplace no alude para nada, ni en ésta ni en ninguna de sus otras memorias, a este trabajo de Bayes, al que sólo se refiere de pasada al final de este *Ensayo*

en la posibilidad de los futuros, cosa que no es admisible. Las combinaciones regulares suceden más raramente únicamente porque son menos numerosas. Si buscamos una causa allí donde vemos simetría no es porque consideremos que un acontecimiento simétrico es menos probable que los demás, sino porque, como este acontecimiento tiene que ser el efecto o bien de una causa regular o bien del azar, la primera de estas suposiciones es más probable que la segunda. Vemos en una mesa caracteres de imprenta dispuestos en este orden: *Constantinopla,* y concluimos que esta disposición no es efecto del azar, pero no porque sea menos probable que las otras, ya que si no se empleara esta palabra en ninguna lengua no le supondríamos causa particular alguna, sino porque, al ser de uso corriente entre nosotros, es mucho más probable que una persona haya dispuesto así los caracteres anteriores que el que esta disposición sea debida al azar.

Es este el momento oportuno para definir el término *extraordinario.* Cuando pensamos, disponemos todos los acontecimientos posibles en diversas clases y consideramos *extraordinarios* a los de las clases que comprenden un número muy pequeño de ellos. Así, en el juego de *cara* o *cruz,* la aparición de cara cien veces seguidas nos parece algo extraordinario porque, de las dos clases de series en que se distribuye el número casi infinito de combinaciones que pueden aparecer en cien jugadas —series regulares o en las que vemos que reina un orden fácil de captar y series irregulares— las últimas son mucho más numerosas. El que salga una bola blanca de una urna que de un millón de bolas sólo contiene una de ese color, siendo las demás negras, nos parece también extraordinario, porque sólo formamos dos clases de eventos relativos a los dos colores. Pero el que salga, por ejemplo, el número 79 de una urna que contiene un millón nos parece un acontecimiento ordinario, porque comparando los números entre sí individualmente, sin distribuirlos en clases, no tenemos ninguna razón para creer que saldrá uno de ellos antes que los otros.

La conclusión general que debemos extraer de lo que antecede es que cuanto más extraordinario es un hecho tanto más necesitado está de apoyarse en sólidas pruebas, ya que el que los que lo atestiguan puedan engañar o haber sido engañados son dos causas tanto más probables cuanto menos lo sea la realidad del hecho. Aclaremos esto con un ejemplo.

Se ha extraído un número de una urna que encierra mil. Un testigo de la extracción anuncia que ha salido el número 79; se desea conocer la probabilidad de que esto sea así. Supongamos que sabemos por experiencia que este testigo miente una de cada diez veces, de suerte que la probabilidad de su testimonio es de 9/10. Aquí, el evento observado es el testigo asegurando que ha salido el número 79. Este evento puede resultar de las dos hipótesis siguientes, a saber: que el testigo enuncie la verdad o que mienta. Según el principio que acabamos de exponer sobre la probabilidad de las causas, inferida de los acontecimientos, es preciso comenzar por determinar *a priori* la probabilidad del evento en cada una de las hipótesis. En la primera, la probabilidad de que el testigo anuncie el número 79 es la probabilidad misma de que salga dicho número, es decir, 1/1000. Es preciso multiplicarla por la probabilidad 9/10 de la veracidad del testigo; tendremos entonces que la probabilidad del evento observado es, en esta hipótesis, 9/10000. Si el testigo miente, no habrá salido el número 79, siendo la probabilidad de este caso 999/1000. Pero, para anunciar la salida de este número, el testigo tiene que elegir entre los 999 números no salidos y, como se supone que no tiene ningún motivo de preferencia para elegir unos más bien que otros, la probabilidad de que elija el número 79 es 1/999; multiplicando esta probabilidad por la anterior, tendremos por tanto que la probabilidad de que el testigo anuncie el número 79 es, en la segunda hipótesis, 1/1000. Hay que multiplicar además esta probabilidad por la probabilidad 1/10 de la hipótesis misma, lo que da 1/10000 para la probabilidad del evento relativa a esta hipótesis. Si ahora formamos

una fracción cuyo numerador sea la probabilidad relativa a la primera hipótesis y cuyo denominador, la suma de las probabilidades de las dos hipótesis, tendremos la probabilidad de la primera hipótesis, que será 9/10, es decir, la misma probabilidad de la veracidad del testigo. Esta es también la probabilidad de que salga el número 79. En cuanto a la probabilidad de que el testigo mienta y de que no salga este número, ésta será 1/10.

Si el testigo que pretende engañar tuviera algún interés en elegir el número 79 entre los números no salidos; si considerara, por ejemplo, que al haber sobre este número una apuesta considerable, el anuncio de su salida va a aumentar su crédito, entonces la probabilidad de que elija este número no será ya, como antes, 1/999, sino que podrá ser de 1/2, 1/3, etc., según el interés que tenga en anunciar su salida. Suponiendo que fuera de 1/9, habrá que multiplicar la probabilidad 999/1000 por esta fracción, para tener, en la hipótesis de que mienta, la probabilidad del evento observado, que aún habrá que multiplicar por 1/10, lo que da 111/10000 para la probabilidad del evento en la segunda hipótesis. Con lo que la probabilidad de la primera hipótesis, esto es, la de que salga el número 79, se reduce por la regla anterior a 9/120, viéndose por tanto considerablemente debilitada por la consideración del interés que el testigo pueda tener en anunciar la salida del número 79. El buen sentido nos dice que tal interés debe inspirar desconfianza, pero el cálculo permite evaluar con exactitud su influencia.

Supongamos ahora que la urna contiene 999 bolas negras y una blanca y que, habiéndose extraído una bola, un testigo anuncia que esta bola es blanca. La probabilidad del evento observado, determinada *a priori,* en la primera hipótesis, será aquí, como en el caso anterior, igual a 9/10000. Pero en la hipótesis de que el testigo mienta, la bola blanca no habrá salido, siendo la probabilidad de este caso de 999/1000. Esta hay que multiplicarla por la probabilidad 1/10 de que exista engaño, lo que da como resultado 999/10000 para la probabilidad del evento observado, relativa a la segunda hipótesis. Esta probabilidad no era más que de 1/10000 en el caso anterior; esta gran diferencia se debe a que, habiendo salido una bola negra, el testigo que pretende engañar no tiene posibilidades de elección entre las 999 bolas que no han salido para anunciar la salida de una bola blanca. Si formamos dos fracciones cuyos numeradores sean las probabilidades relativas a cada hipótesis y cuyo denominador común sea la suma de estas probabilidades, tendremos ahora 9/1008 para la probabilidad de la primera hipótesis y de la salida de una bola blanca, y 999/1008 para la probabilidad de la segunda hipótesis, y de la salida de una bola negra. Esta última probabilidad está muy cerca de la certeza y se acercaría aún mucho más, convirtiéndose en 999999/1000008, si la urna contuviera un millón de bolas de las que sólo una fuera blanca, en cuyo caso la salida de una bola blanca sería todavía mucho más extraordinaria. Vemos así cómo la probabilidad del engaño aumenta a medida que el hecho se va haciendo más extraordinario.

Hasta aquí hemos estado suponiendo que el testigo no se engañaba a sí mismo; pero si también admitimos la posibilidad de que él se engañe, el hecho extraordinario se hace más inverosímil aún. En este caso, en lugar de dos hipótesis, tendremos las cuatro siguientes, a saber: la de que el testigo ni engañe ni se engañe, la de que el testigo no engañe pero sí se engañe, la de que engañe pero no se engañe y, por último, la de que engañe y se engañe. Determinando *a priori* en cada una de estas hipótesis la probabilidad del evento observado, por el principio sexto, nos encontramos con que la probabilidad de que el hecho atestiguado sea falso equivale a una fracción cuyo numerador es el número de bolas negras de la urna, multiplicado por la suma de las probabilidades de que el testigo no engañe y se engañe o engañe y no se engañe, y cuyo denominador es el numerador incrementado con la suma de las probabilidades de que el testigo no se engañe y no engañe o de que engañe y se engañe a la vez. Vemos, pues, que si el nú-

mero de bolas negras de la urna es muy grande, lo que hace extraordinaria la salida de la bola blanca, la probabilidad de que el hecho atestiguado no sea el caso se aproxima enormemente a la certeza.

Si extendemos esta consecuencia a todos los hechos extraordinarios, nos encontramos con que la probabilidad de error o de engaño del testigo resulta tanto mayor cuanto más extraordinario sea el hecho atestiguado. Algunos autores han mantenido lo contrario basándose en que, como la vista de un hecho extraordinario es completamente similar a la de uno ordinario, los mismos motivos deben inducirnos a creer igualmente al testigo, sea del tipo que sea el hecho que afirme. El simple buen sentido rechaza una afirmación tan extraña, pero el cálculo de probabilidades, además de confirmar la indicación del sentido común, aprecia la inverosimilitud de los testimonios sobre los hechos extraordinarios.

No prestaríamos nada de crédito al testimonio de un hombre que nos contara que, arrojando cien dados al aire, han caído todos sobre la misma cara. Si nosotros mismos hubiésemos sido espectadores de ese acontecimiento no creeríamos en nuestros propios ojos más que tras de haber examinado escrupulosamente todas las circunstancias con el fin de cerciorarnos de que no ha habido truco alguno. Pero después de este examen, no vacilaríamos en admitirlo, pese a su enorme inverosimilitud, y a nadie se le ocurriría recurrir, para explicarlo, a una ilusión producida por una alteración de las leyes de la visión. La conclusión que debemos sacar de aquí es que la probabilidad de la constancia de las leyes de la naturaleza es para nosotros superior a la de que la cosa de que se trate no deba tener lugar, siendo infinitamente superior a la de los hechos históricos mejor verificados. Esto nos permite calcular la inmensa fuerza que han de tener los testimonios necesarios para admitir una suspensión de las leyes naturales y lo muy equivocado que sería aplicar a este caso las reglas ordinarias de la crítica. Todos aquellos que, sin ofrecer esta gran cantidad de testimonios, apoyan lo que dicen con relatos de acontecimientos contrarios a estas leyes, merman, más que aumentar, la credibilidad que tratan de inspirar, pues en tal caso estos relatos hacen extraordinariamente probable el error o el engaño de quienes los hacen. Pero lo que disminuye la credulidad de los hombres instruidos suele aumentar la del vulgo, por las razones que antes hemos dado.

Hay cosas tan extraordinarias que no hay nada que pueda hacer vacilar su inverosimilitud. Sin embargo, el efecto causado por una opinión dominante puede llegar a debilitarla tanto que parezca inferior a la probabilidad de los testimonios, y cuando esta opinión llega a cambiar, una narración absurda, unánimemente admitida en el siglo que la ha producido, no ofrece a los siguientes sino una nueva prueba de la enorme influencia de la opinión general en las mejores cabezas. Dos grandes hombres del siglo de Luis XIV, Racine y Pascal, son ejemplos palpables. Entristece ver con qué complacencia Racine, ese admirable pintor del corazón humano y el más perfecto poeta que ha habido nunca, narra como milagrosa la curación de la joven Perrier, sobrina de Pascal e interna de la abadía de Port-Royal; resulta penoso leer los argumentos con los que Pascal trata de demostrar que este milagro resultaba necesario para la religión en la medida en que servía para justificar la doctrina de las religiosas de esta abadía, entonces perseguidas por los jesuitas. La joven Perrier llevaba tres años y medio padeciendo una fístula lacrimal, cuando tocó con su ojo enfermo una reliquia que se suponía que era una de las espinas de la corona del Salvador, creyéndose curada al instante. Algunos días más tarde, médicos y cirujanos confirmaron la curación y mantuvieron la tesis de que no habían desempeñado ningún papel en ella ni la naturaleza ni los medicamentos. Este acontecimiento sucedió en 1656, produciendo un gran alboroto, «todo París», dice Racine, «se dirigió a Port Royal. La muchedumbre crecía de día en día y Dios mismo parecía complacerse autorizando la devoción de las gentes, por la cantidad de milagros que se hicieron en

esta iglesia». En esta época, los milagros y los sortilegios todavía no parecían inverosímiles y no se dudaba en atribuirles aquellas singularidades de la naturaleza que no se podían explicar de otra forma.

Este es el lugar idóneo para la discusión de un famoso argumento de Pascal que Craig, matemático inglés, ha reproducido dándole una forma geométrica [6]. Ciertos testigos atestiguan que saben por la propia Divinidad que, si uno se conforma a una cosa como esa, vivirá no una ni dos, sino una infinidad de vidas dichosas. Por débil que sea la probabilidad de los testimonios, con tal de que no sea infinitamente pequeña, es evidente que la ventaja de aquellos que se conforman a la cosa prescrita es infinita, ya que es el producto de esta probabilidad por un bien infinito; por consiguiente, uno no debe dudar en procurarse dicha ventaja.

6 Laplace se está refiriendo aquí a un trabajo sobre la probabilidad de los testimonios, publicados por Craig, en 1699, con el título de *Theologiae Christianae Principia Mathematica,* y en el que Craig considera el famoso argumento pascaliano en favor de las ventajas que encierra el apostar por la existencia de Dios. El argumento lo expone Pascal en sus *Pensamientos* (II, pp. 418-233) en los siguientes términos: «Puesto que existe el mismo riesgo de ganancia que de pérdida, si no tuviéseis que ganar más que dos vidas por una, todavía podríais ganar; pero si hubiese tres vidas que ganar, habría que jugar (puesto que estáis obligado a jugar) y seríais imprudente, ya que estáis obligado a jugar, no arriesgando vuestra vida para ganar tres en un juego en el que hay la misma probabilidad de perder que de ganar. Pero hay una eternidad de vida y de felicidad. Y siendo así, aunque hubiese una infinidad de posibilidades de las que una sola estuviese a vuestro favor, seguiríais teniendo razón en apostar una para ganar dos, y obraríais erróneamente, estando obligado a jugar, no queriendo arriesgar una vida contra tres en un juego en el que de una infinidad de probabilidades sólo hay una a vuestro favor si hubiese una infinidad de vida infinitamente feliz que ganar. Pero hay aquí una infinidad de vida infinitamente feliz que ganar; una probabilidad de ganar contra un número infinito de probabilidades de perder, y lo que jugais es finito. Esto suprime todo término medio: en todos los sitios en que está lo infinito y en los que no hay la mayor cantidad de probabilidades de perder contra una sola de ganar no hay que vacilar, hay que arriesgarlo todo» (B. Pascal: *Obras,* Alfaguara, 1981, p. 460).

Este argumento se basa en el número infinito de vidas dichosas prometidas en nombre de la Divinidad por los testigos; habría que hacer lo que ellos prescriben precisamente porque exageran sus promesas más allá de todo límite, consecuencia ésta que repugna al buen sentido. También el cálculo nos hace ver que esta exageración reduce incluso la probabilidad de su testimonio hasta el extremo de hacerla infinitamente pequeña o nula. En efecto, este caso viene a ser el de un testigo que anunciara la salida del número más elevado de una urna llena de una gran cantidad de números de los que sólo se ha extraído uno, y que tuviera un gran interés en anunciar la salida de dicho número. Antes hemos visto hasta qué punto este interés debilita su testimonio. No evaluando más que en 1/2 la probabilidad de que si el testigo miente, elegirá el número más elevado, el cálculo establece que la probabilidad de su declaración es igual a una fracción cuyo numerador es el doble de la probabilidad de su testimonio, considerada *a priori* o con independencia de su declaración, y cuyo denominador es el producto del número de números de la urna por la unidad menos esta última probabilidad. Para asimilar este caso al del argumento de Pascal, basta con representar mediante los números de la urna todos los números posibles de vidas dichosas, lo que hace infinito el número de tales números, y con observar que si los testigos mienten, para acreditar su engaño, ponen el mayor interés en prometer una dicha eterna. La expresión anterior de la probabilidad de su testimonio se convierte entonces en infinitamente pequeña. Multiplicándola por el número infinito de vidas dichosas prometidas, el infinito desaparece del producto que expresa la ventaja resultante de esta promesa, lo que destruye el argumento de Pascal.

Séptimo Principio

La probabilidad de un acontecimiento futuro es la suma de los productos de la probabilidad de cada causa, extraída del acontecimiento observado, por la probabili-

dad de que, en caso de que exista dicha causa, el acontecimiento futuro tenga lugar. El siguiente ejemplo aclarará este principio.

Imaginemos una urna que no contiene más que dos bolas, cada una de las cuales es blanca o negra. Se extrae una de estas dos bolas, volviendo a introducirla acto seguido en la urna para proceder a una nueva extracción. Supongamos que en las dos primeras extracciones se han sacado bolas blancas; la pregunta es qué probabilidad existe de sacar nuevamente una bola blanca en la tercera extracción.

No caben hacer aquí más que dos hispótesis: o una de las bolas es blanca y la otra negra, o las dos son blancas. En la primera hipótesis, la probabilidad del acontecimiento observado es 1/4; en la segunda es la unidad, es decir, la certeza. Así, si consideramos estas hipótesis como causas, sus probabilidades respectivas serán, de acuerdo con el sexto principio, 1/5 y 4/5. Ahora bien, si se cumple la primera hipótesis, la probabilidad de obtener una bola blanca en la tercera extracción es 1/2; si la segunda, es igual a la unidad; multiplicando estas probabilidades por las de las hipótesis correspondientes, tenemos que la probabilidad de sacar una bola blanca en la tercera extracción será la suma de estos productos, esto es, 9/10.

Cuando la probabilidad de un acontecimiento simple resulta desconocida, se le pueden asignar igualmente todos los valores desde el cero hasta el uno. La probabilidad de cada una de estas hipótesis, extraída del acontecimiento observado, es, por el sexto principio, una fracción cuyo numerador es la probabilidad del acontecimiento en esta hipótesis y cuyo denominador es la suma de las probabilidades semejantes relativas a todas las hipótesis. Así, la probabilidad de que la posibilidad del acontecimiento esté comprendida dentro de los límites dados es la suma de las fracciones comprendidas dentro de dichos límites. Si se multiplica cada fracción por la probabilidad del acontecimiento futuro, determinada en la hipótesis correspondiente, entonces, por el séptimo principio, la suma de los productos relativos a todas las hipótesis será la probabilidad del acontecimiento futuro, extraída del acontecimiento observado. Resulta así que, si un acontecimiento se repite una y otra vez un número cualquiera de veces, la probabilidad de que vuelva a repetirse la vez siguiente es igual a dicho número incrementado en una unidad, dividido por el mismo número incrementado en dos unidades. Haciendo remontar, por ejemplo, la época más antigua de la historia a cinco mil años, esto es, a 1826213 días, y habiendo salido el sol ininterrumpidamente durante este intervalo cada revolución de veinticuatro horas, se puede apostar 1826214 contra uno a que saldrá también mañana. No obstante, este número es incomparablemente mayor para quien, conociendo por el conjunto de los fenómenos el principio regulador de los días y de las estaciones, sepa que no hay nada que pueda detener su curso en el momento actual.

En su Aritmética política, Buffon calcula de distinta manera la probabilidad anterior[7]. El supone que sólo difiere de la unidad en una fracción cuyo numerador es la unidad y cuyo denominador es el número dos elevado a una potencia cuyo exponente es igual al número de días transcurridos desde dicha época. Pero este ilustre escritor no conocía la forma exacta de remontarse de los acontecimientos pasados a la probabilidad de las causas y de los acontecimientos futuros.

De la esperanza

La probabilidad de las acontecimientos sirve para determinar la esperanza o el temor de las personas inte-

[7] En su *Essai d'Aritmetique morale*, aparecido en 1777, distingue Buffon tres tipos de verdades, a saber, verdades geométricas que conocemos por razonamiento, verdades físicas que conocemos por experiencia y verdades que conocemos por testimonio. El principio sobre cuya arbitrariedad se pronuncia aquí Laplace lo formula Buffon a propósito de las del segundo tipo.

resadas en su existencia. La palabra *esperanza* tiene diversas acepciones: En general expresa la ventaja del que espera un bien cualquiera dentro de suposiciones que son sólo probables. En la teoría del azar, esta ventaja es el producto de la suma esperada por la probabilidad de obtenerla: es la suma parcial que ha de ser restituida, cuando no se quieren correr los riesgos del evento, suponiendo que el reparto se haga proporcionalmente a las probabilidades. Este reparto, hecha abstracción de todas las circunstancias extrañas, es el único equitativo, ya que con igual grado de probabilidad se tiene un derecho igual sobre la suma esperada. Llamaremos a esta ventaja *esperanza matemática.*

Octavo Principio

Cuando esta ventaja depende de varios acontecimientos se la obtiene tomando la suma de los productos de la probabilidad de cada acontecimiento por el bien que se confiere a su acaecimiento.

Apliquemos este principio a algunos ejemplos. Supongamos que en el juego de *cara* o *cruz,* Pablo recibe dos francos si saca *cara* en la primera jugada y cinco si no la saca hasta le segunda. Multiplicando dos francos por la probabilidad 1/2 del primer caso y cinco francos por la probabilidad 1/4 del segundo, tenemos que la ventaja de Pablo será la suma de los productos, esto es, dos francos y cuarto. Esta es la suma que debe darle por adelantado a quien le procura esa ventaja, pues, a efectos de la equitatividad del juego, lo que se pone ha de ser igual a la ventaja que produce.

Si Pablo recibe dos francos si saca *cara* en la primera jugada y cinco por sacarla en la segunda, la haya sacado o no en la primera, es preciso distinguir entonces cuatro casos, a saber, *cara* en la primera y en la segunda jugadas, *cara* en la primera y *cruz* en la segunda, *cruz* en la primera y *cara* en la segunda y, por último, *cruz* en las dos. Pablo recibe siete francos en el primer caso, dos en el segundo, cinco en el tercero y nada en el cuarto. La probabilidad de cada uno de estos casos es

1/4; multiplicando, pues, por 1/4 la suma correspondiente a cada caso, y añadiéndole estos productos, tenemos entonces que la ventaja de Pablo, y, por consiguiente, lo que tendrá que poner en el juego, serán tres francos y medio.

Noveno Principio

En una serie de acontecimientos probables, de los cuales unos producen un beneficio y otros una pérdida, se obtendrá la ventaja resultante sumando los productos de la probabilidad de cada acontecimiento favorable por el beneficio que produce y restando de esta suma la de los productos de la probabilidad de cada acontecimiento desfavorable por la pérdida asignada a él. Si la segunda suma supera a la primera, el beneficio se convierte en pérdida y la esperanza se transforma en temor.

En la vida diaria se debe hacer siempre todo lo posible por igualar al menos el producto del bien que se espera por su probabilidad con el producto semejante relativo a la pérdida. Pero, para lograrlo, es preciso evaluar con toda exactitud las ventajas, las pérdidas, así como sus probabilidades respectivas, para lo cual se precisan una gran ecuanimidad, un tacto delicado y una gran experiencia: hace falta saber librarse de los prejuicios, de las ilusiones del miedo y de la esperanza, y de esas falsas ideas de suerte y felicidad de las que la mayor parte de los hombres nutren su amor propio.

Los geómetras se han ocupado mucho de la aplicación de los anteriores principios al problema siguiente: [8]

[8] Se trata del «problema de San Petersburgo», llamado así por haber sido tratado por primera vez de este modo por Daniel Bernouilli en su memoria *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis,* contenida en los *Comentarii* de la Academia de S. Petersburgo. El problema como tal no era nuevo (se encuentra ya en una carta de N. Bernouilli dirigida a Montmort), pero lo que sí resulta novedosa es la aplicación que, en su intento de resolverlo, hace D. Bernouilli, de su concepto de esperanza moral. Laplace parece aceptar esta solución dada por D. Bernouilli

Pablo juega a *cara* o *cruz* con la condición de recibir dos francos si saca *cara* en la primera jugada, cuatro si no la saca hasta la segunda, ocho si no la saca hasta la tercera, y así sucesivamente. Por el octavo principio, su apuesta ha de ser igual al número de jugadas, de suerte que si la partida prosigue hasta el infinito, su apuesta ha de ser infinita. Sin embargo, ningún hombre razonable estaría dispuesto a exponer en un juego así ni siquiera una suma razonable, como, por ejemplo, cincuenta francos. ¿De dónde proviene esta diferencia entre el resultado del cálculo y lo que dice el sentido común? En seguida se vio que provenía del hecho de que la ventaja moral que un bien nos procura no es proporcional a dicho bien, sino que depende de mil circunstancias generalmente muy difíciles de definir, de las que la más general e importante es la de la fortuna. En efecto, es evidente que un franco tiene mucho más valor para el que sólo tiene cien que para el millonario. En el beneficio esperado es preciso distinguir, pues, entre su valor absoluto y su valor relativo. Este se rige por los motivos que lo hacen deseable, en tanto que el primero es independiente de ellos. No se puede dar un principio general para evaluar este valor relativo. Sin embargo, Daniel Bernouilli ha propuesto uno que puede servir en muchos casos.

Décimo Principio

Es el siguiente: el valor relativo de una suma infinitamente pequeña es igual al valor absoluto dividido por el bien total de la persona interesada. Esto supone que todo hombre posee un cierto bien cuyo valor nunca puede suponerse nulo. En efecto, aquel que no posee nada confiere a su existencia un valor por lo menos equivalente a lo que le es absolutamente necesario para vivir.

Si se aplica al análisis el principio que acabamos de exponer se obtiene la regla siguiente:

(*Théorie Analytique*, p. 439), mientras que Poisson prefiere reconciliar la teoría matemática con el sentido común.

Designando mediante la unidad la parte de la fortuna de un individuo independiente de sus expectativas, si se determinan los distintos valores que esa fortuna puede recibir en virtud de esas expectativas y sus probabilidades, el producto de tales valores elevados a las potencias indicadas por tales probabilidades será la fortuna física que le proporcionaría a dicho individuo la misma ventaja moral que recibe de la parte de su fortuna tomada como unidad y de sus expectativas; restando de este producto la unidad, la diferencia será el incremento de la fortuna física debido a las expectativas; denominaremos a este incremento *esperanza moral* [9]. No es difícil ver que, cuando la fortuna tomada como unidad resulta infinita con respecto a las variaciones que producen en ella las expectativas, esta esperanza moral coincide con la matemática, mientras que cuando dichas variaciones constituyen una parte apreciable de dicha unidad, las dos esperanzas pueden diferir considerablemente entre sí.

Esta regla lleva a resultados que concuerdan con las indicaciones del sentido común, las cuales pueden ser apreciadas con alguna exactitud con ayuda de este medio. Así, por ejemplo, en el problema anterior, nos encontramos con que no es razonable que Pablo apueste más de nueve francos, si su fortuna asciende a doscientos. Esta regla lleva también a repartir el riesgo entre diversas partes de un bien en expectativa, en lugar de exponerlo enteramente al mismo riesgo. Asimismo de ella resulta que hasta en el juego más equitativo, la pérdida es siempre relativamente mayor que la ganancia, pues el producto de la fortuna tomada como unidad, incrementada con la ganancia y elevada a una potencia igual a la probabilidad de ganar, por dicha unidad me-

9 La teoría de la «esperanza moral» fue introducida por D. Bernouilli, en el trabajo citado en la nota anterior, con el ánimo de dar cuenta del valor relativo del dinero, dejado de lado por la teoría de la esperanza matemática. Más tarde los economistas establecerían sobre la base de este concepto su principio de la utilidad marginal.

nos la pérdida y elevada a una potencia igual a la probabilidad de dicha pérdida, es siempre menor que la fortuna del jugador antes de su apuesta. Suponiendo, por ejemplo, que esta fortuna fuera de cien francos y que el jugador apostara cincuenta al juego de *cara* o *cruz,* su fortuna después de la apuesta podría ser, en virtud de su expectativa, o de ciento cincuenta francos o tan sólo de cincuenta, siendo de 1/2 la probabilidad de cada uno de estos dos casos; por la regla anterior, esto quiere decir que esta fortuna es igual a la raíz cuadrada del producto de ciento cincuenta por cincuenta, con lo que se reduce a ochenta y siete francos, suma ésta que proporcionaría al jugador la misma ventaja moral que el estado de su fortuna después de la apuesta. El juego es, por tanto, desventajoso, incluso en el caso en que la apuesta sea igual al producto de la suma esperada por su probabilidad. Se puede juzgar por este dato la inmoralidad de los juegos en los que la suma esperada esté por debajo de tal producto. Si subsisten es sólo debido a los falsos razonamientos y a la codicia que fomentan, los cuales, al llevar a la gente a sacrificar lo necesario en aras de quiméricas esperanzas cuya inverosimilitud no está en condiciones de apreciar, constituyen la fuente de una infinidad de males.

De los métodos analíticos del cálculo de probabilidades

La aplicación de los principios que acabamos de exponer a distintas cuestiones de probabilidad exige métodos cuya investigación ha dado lugar a numerosas ramas del análisis, entre ellas la teoría combinatoria y el cálculo de diferencias finitas.

Si se forma el producto de los binomios, la unidad más una primera letra, la unidad más una segunda letra, la unidad más una tercera y así sucesivamente hasta n letras, y de este producto desarrollado se resta la unidad, se tendrá la suma de las combinaciones de todas estas letras tomadas de una en una, de dos en

dos, de tres en tres, etc., teniendo cada una de ellas como coeficiente la unidad. Para obtener el número de combinaciones de estas n letras tomadas de r en r, se observará que si se suponen iguales entre sí estas letras, el producto anterior se convertirá en la potencia *enésima* del binomio uno más la primera letra y que el número de combinaciones de las n letras tomadas de r en r será el coeficiente de la potencia *enésima* de la primera letra en el desarrollo de este binomio; se obtendrá, por tanto, dicho número por la conocida fórmula del binomio.

Si se quiere tomar en consideración la posición relativa de las letras en cada combinación, se debe observar que, cuando se añade una segunda letra a la primera, se la puede colocar en el primer lugar y en el segundo, lo que da lugar a dos combinaciones. Si a estas combinaciones se añade una tercera letra, se le puede asignar en cada combinación el primero, el segundo y el tercer puesto, lo que da lugar a tres combinaciones respecto a cada una de las otras dos, es decir, seis en total. Esto permite concluir fácilmente que el número de colocaciones que cabe dar a r letras es el producto de los números desde uno hasta r. Por tanto, para poder tomar en consideración la posición relativa de las letras es preciso multiplicar por este producto el número de las combinaciones de las n letras tomadas de r en r, lo que equivale a suprimir el denominador del coeficiente del término del binomio que expresa este número.

Supongamos una lotería compuesta por n números de los que salen r en cada sorteo; queremos saber la probabilidad de que salgan s números determinados en un sorteo. Para llegar a ella habrá que empezar por determinar el número de combinaciones de los demás números, tomados de r menos s en r menos s; pues es evidente que, añadiendo los s números dados a cada una de estas combinaciones, se tendrá el número de todas las combinaciones de las n letras tomadas de r en r en las que figuren los s números dados. Si se divide

este número por el de las combinaciones de todas las letras tomadas de *r* en *r* se tendrá la probabilidad buscada. Nos encontramos así con que esta probabilidad es igual a la relación entre el número de combinaciones de *r* letras tomadas de *s* en *s* y el número de combinaciones de *n* letras tomadas también de *s* en *s*.

De acuerdo con este teorema, se pueden calcular las posibilidades de ganar que brinda la lotería francesa e inferir sus beneficios. Como es bien sabido, esta lotería se compone de 90 números, de los que salen cinco en cada sorteo. La probabilidad de que salga un determinado extracto es igual, según este teorema, a 5/90, esto es, 1/18; por lo que, para que el juego fuera equitativo, la lotería debería entonces pagar dieciocho veces lo que se apuesta. El número total de combinaciones binarias de 90 números de 4005, de las que salen 10 en cada sorteo; de este modo, la probabilidad de que salga un determinado ambo es 10/4005, con lo que la lotería debería pagar, por ambo salido, cuatrocientas veces y media lo apostado. De igual modo se ve que por un terno debería pagar 11848 veces la apuesta, 511038, por un cuaterno y 494268, por un quinterno. Sin embargo, la lotería está lejos de brindar estas ventajas a los jugadores.

Supongamos ahora una urna con *n* bolas que se pueden extraer igualmente de una en una, de dos en dos, de tres en tres, etc. Se ha llevado a cabo una de tales extracciones y se desea saber la probabilidad de que el número de bolas extraídas sea impar. De lo dicho antes se deduce que si se eleva el binomio uno más uno a la potencia *n*, los términos segundo, tercero, etc..., expresarán los números de las combinaciones de las *n* bolas tomadas de una en una, de dos en dos, etc.; de este modo, la totalidad de las combinaciones será la potencia enésima de dos, menos la unidad; la suma de los términos segundo, cuarto, sexto, etc., del desarrollo del binomio será el número de combinaciones impares; es obvio que será la mitad de la diferencia de las potencias enésimas de los binomios uno más uno y uno menos uno, esto es, la mitad de la potencia enésima de dos. Restando de esta diferencia la unidad, tendremos el número de combinaciones pares y diviendo estos dos números de combinaciones por su suma, tendremos las probabilidades respectivas de las combinaciones impares y pares. Vemos así que resulta más ventajoso apostar por un número impar de bolas extraídas que hacerlo por un número par.

Pero la forma más general y directa de resolver las cuestiones de probabilidad consiste en hacerlas depender de ecuaciones diferenciales. Si se comparan los estados sucesivos de la función que expresa la probabilidad, cuando se incrementan las variables de aquella en sus diferencias respectivas, lo más frecuente es que la cuestión propuesta produzca una relación muy simple entre los diversos estados de esta función. Esta relación es lo que se denomina *ecuación de diferencias ordinarias o parciales;* ordinarias, cuando no hay más que una variable; parciales, cuando hay varias. Demos algunos ejemplos.

Tres jugadores que se suponen de la misma categoría juegan juntos en las condiciones siguientes. Aquel de los dos primeros que gane a su adversario juega con el tercero y, si también le gana, se acaba la partida. Si pierde, el ganador juega con el otro, y así sucesivamente, hasta que uno de los jugadores haya ganado consecutivamente a los otros dos, momento en que termina la partida. Se desea conocer la probabilidad de que la partida termine en un número dado de jugadas. Empecemos por averiguar primero la probabilidad de que termine en una jugada determinada, como, por ejemplo, la décima. Para ello, el jugador que la gana ha de participar en el juego en la novena jugada y ganarla, lo mismo que la jugada siguiente. Pero, si en lugar de ganar la novena jugada, fuera vencido por su adversario, como éste ya ha ganado al otro jugador, la partida terminaría en esta jugada; por tanto, la probabilidad de que un jugador entre en juego en la novena jugada y la gane es igual a la de que la partida se acabe

precisamente en esta jugada, y como, para que la partida se acabe en la décima jugada, dicho jugador tiene que ganar la partida siguiente, esta última probabilidad no será más que un medio de la anterior. De donde se deduce que si se considera esta probabilidad como una función del número de la jugada en la que ha de acabar, esta función será la mitad de esa misma función en la que se ha disminuido el número o la variable en una unidad. Esta igualdad constituye una de las ecuaciones que se denominan *ecuaciones de diferencias finitas ordinarias.*

Por medio de ellas se puede determinar fácilmente la probabilidad de que la partida termine en una jugada determinada cualquiera. Es evidente que la partida no puede acabar como pronto hasta la segunda jugada, y para ello es preciso que aquel de los dos primeros jugadores que haya ganado a su adversario gane al tercero en la segunda jugada. Por tanto, la probabilidad de que la partida acabe en esta jugada es 1/2. De donde se deduce, en virtud de la ecuación anterior, que las probabilidades sucesivas de finalizar la partida son 1/4 para la tercera jugada, 1/8 para la cuarta, etcétera, y, en general, 1/2 elevado a una potencia igual al número de la jugada menos uno. Si tomamos ahora la suma de todas estas potencias, desde la primera hasta la última, la probabilidad de que la partida se termine en el número de jugadas indicado por este número será igual a la unidad menos la última de estas potencias de 1/2.

Consideremos aún el primer problema sobre las probabilidades que obtuvo solución y que Pascal le propuso a Fermat [10]. Dos jugadores, A y B, de igual destreza, juegan entre sí con la condición de que aquel que haya ganado primero al otro un número dado de veces habrá ganado la partida y se llevará la suma de todo lo puesto en el juego. Después de algunas jugadas, los jugadores acuerdan retirarse sin haber terminado la partida; la pregunta es de qué modo han de repartirse la suma. Es evidente que tales partes han de ser proporcionales a sus probabilidades respectivas de ganar la partida, por lo que la cuestión se reduce a determinar estas probabilidades. Tales probabilidades dependen, evidentemente, del número de puntos que a cada jugador le faltan para lograr el número dado. Así, la probabilidad de A es una función de esos dos números que tomaremos como variables. Si los dos jugadores acordaran jugar una jugada más (acuerdo que no cambia en nada su suerte), o la ganaría A, en cuyo caso el número de puntos que le faltan se reduciría en una unidad, o la ganaría B, en cuyo caso el número de puntos que le faltarían a B se vería reducido en una unidad; pero la probabilidad de cada uno de estos casos es 1/2; por tanto, la función buscada es igual a la mitad de esta función en la que se disminuye la primera variable en una unidad, más la mitad de la misma función en la que se disminuye la segunda variable también en una unidad. Esta igualdad no es sino una de esas ecuaciones que se denominan *ecuaciones de diferencias parciales.*

Mediante ellas se pueden determinar las probabilidades de A, partiendo de los números más pequeños y

[10] Este problema, conocido con el nombre de problema de los repartos o —como Pascal lo llama— «de los partidos», constituye el tema de la correspondencia entre Pascal y Fermat, publicada en las *Varia Opera Mathematica Petri de Fermat* (Toulouse, 1679, pp. 179 y siguientes). En la solución dada por estos dos autores a dicho problema suele decirse que tiene su origen el cálculo de probabilidades. «Un problema relativo a los juegos de azar, propuesto a un austero jansenista por un hombre de mundo, ha sido el origen del cálculo de probabilidades», escribe Poisson en sus *Recherches sur la probabilité,* p. 1. Y George Boole, en sus *Laws of Thought,* dice: «El problema que el Caballero de Meré (un afamado jugador) propuso al solitario de Port Royal (cuando todavía no se había visto apartado de los intereses de la ciencia por la contemplación, mucho más absorbente, de la «grandeza y miseria humanas») fue el primero de una larga serie de problemas destinada a dar origen a nuevos métodos de análisis matemático y a rendir un valioso servicio en las cuestiones prácticas de la vida» (p. 243).

observando que la probabilidad, o la función que la expresa, es igual a la unidad, cuando al jugador A no le falta ningún punto, o cuando la primera variable es nula, así como que esta función se convierte en nula con la segunda variable. Suponiendo, pues, que al jugador A sólo le falta un punto, nos encontramos con que su probabilidad es 1/2, 3/4, 7/8, etc., según que a B le falte un punto, dos, tres, etc. En general, es entonces igual a la unidad menos 1/2 elevado a una potencia igual al número de puntos que le faltan a B. A continuación supondremos que al jugador A le faltan dos puntos, y veremos que su probabilidad es 1/4, 1/2, 11/16, etc., según que al jugador B le falte un punto, dos, tres, etc. Luego supondremos que al jugador A le faltan tres puntos, y así sucesivamente.

Esta forma de obtener los valores sucesivos de una cantidad, por medio de su ecuación diferencial, es larga y penosa. Los geómetras han buscado métodos para obtener la función general de las variables que satisface a esta ecuación, de modo que, en cada caso concreto, no haga falta hacer otra cosa que sustituir en esta función los valores correspondientes de las variables: este es el cometido del cálculo integral. Entre las formas ideadas para llegar a ella, la que me parece más simple y general es la que se basa en la consideración de las *funciones generatrices,* cuya idea es la siguiente [11]:

Si se imagina una función A de una variable, desarrollada en una serie ascendente respecto a las potencias de dicha variable, el coeficiente de una cualquiera de estas potencias será una función del índice o exponente de la misma. Es a A a lo que yo llamo *función generatriz* de dicho coeficiente o de la función del índice.

Si ahora se multiplica la serie A por una función lineal de la variable como, por ejemplo, la unidad más dos veces dicha variable, el producto será una nueva función generatriz en la que el coeficiente de una potencia cualquiera de la variable será igual al coeficiente de la misma potencia en A, más el doble del coeficiente de la potencia inferior en una unidad. Así, la función del índice en el producto será igual a la función del índice en A más el doble de esta misma función en la cual el índice está disminuido en la unidad. Esta función del índice en el desarrollo del producto puede ser, por tanto, considerada como una derivada de la función del índice en A, derivada que puede expresarse por medio de una letra característica colocada delante de esta última función. La derivación indicada por dicha característica depende de la función multiplicador, que en general designaremos mediante B y que supondremos desarrollada, al igual que A, respecto de las potencias de la variable.

Si el producto de A por B se multiplica de nuevo por B, lo cual equivale a multiplicar A por el cuadrado de B, se formará una tercera función generatriz, en la que el coeficiente de una potencia cualquiera de la variable será una derivada semejante al coeficiente correspondiente del primer producto; se la podrá expresar, por tanto, por la misma letra característica colocada delante de la derivada precedente, con lo que esta característica aparecerá escrita dos veces delante del coeficiente correspondiente de la serie A; pero, en lugar de escribirla en esta forma dos veces, se le asigna como exponente el número dos.

Prosiguiendo de este modo, se observa, en general, que si se multiplica A por una potencia enésima de B, se obtendrá el coeficiente de una potencia cualquiera de la variable en el producto, colocando ante el coeficiente correspondiente de A la letra característica con n como exponente.

Supongamos que B sea la unidad dividida por la variable; entonces, en el producto de A por B, el coeficiente de una potencia de la variable será el de la po-

11 La teoría de las funciones generatrices fue introducida por Laplace en su *Mémoire sur les suites,* de 1782. Esta teoría desempeñó un importante papel en la obra de Laplace, ya que a ella subordinó toda la parte analítica de su *Théorie Analytique,* la primera parte de cuyo primer libro no es más que una reproducción de esta memoria.

tencia de A superior en una unidad; de donde se deduce que en el producto de A por la potencia enésima de B, ese coeficiente será el de la potencia de A aumentada en un número *n* de unidades.

Si B es igual a menos uno más la unidad dividida por la variable, entonces en el producto de A por B el coeficiente de la variable será el de la potencia de A más uno menos el de dicha potencia; será, por tanto, la diferencia finita de este coeficiente en el que se hace variar el índice en una unidad. Así, en el producto de A por la potencia enésima de B, el coeficiente será la diferencia *enésima* del coeficiente correspondiente de A.

Si B es una función de la variable y C otra función de la misma variable, se podrá considerar a B como una función de C, desarrollada en una serie ordenada respecto a las potencias de C; el producto de A por esta serie será, por tanto, exactamente igual al producto de A por B, y los coeficientes de una misma potencia de la variable serán exactamente iguales en estos dos productos. Pero el primero de estos coeficientes está formado por una serie de términos correspondientes a los productos de A por las diversas potencias de C. En el producto de A por C, este coeficiente es una nueva derivada del coeficiente correspondiente de A, derivada que expresaremos mediante una nueva letra característica colocada delante de este último coeficiente. Cambiando, pues, las diversas potencias de C en esta nueva característica afectada por exponentes iguales a los de dichas potencias y colocada ante el exponente correspondiente de A, y multiplicando luego el término independiente de C de la serie precedente por este coeficiente, tendremos el coeficiente relativo al producto de A por el desarrollo de B de acuerdo con las potencias de C. Si se iguala este coeficiente al relativo al producto de A por B, que se halla expresado por la primera característica colocada ante el coeficiente correspondiente de A, se tendrá la expresión de la derivada indicada por esta característica, en una serie ordenada de acuerdo con los exponentes de la nueva característica. Vemos,

pues, que para formar esta serie, es decir, para vaciar las funciones generatrices en sus coeficientes, basta con sustituir en B, considerada como función de C, esta última por la nueva característica, desarrollar seguidamente B, en una serie ordenada respecto a las potencias de esta característica y, por último, escribir el coeficiente de una potencia indeterminada de la variable en A a continuación de cada potencia de la característica y detrás del primer término de la serie. De este modo, al ser este coeficiente una función cualquiera del índice de la potencia de la variable, la transformación de una derivada de esta función, indicada mediante una primera letra característica, en una serie ordenada respecto a los exponentes sucesivos de la característica de una nueva derivada de la misma función, se reduce a las operaciones algebraicas del desarrollo de las funciones en series.

Si suponemos que B es igual a la unidad dividida por la variable y que C es igual a esta fracción menos uno B será igual a la unidad más C, y el producto de A por la enésima potencia de B será igual al producto de A por el desarrollo de la enésima potencia del binomio uno más C, pues el coeficiente de una potencia cualquiera de la variable, en el producto de A por B elevado a la enésima potencia es, como hemos visto, el coeficiente de la potencia superior en *n* unidades, de A, y este mismo coeficiente en el producto de A por una potencia de C es la diferencia de igual orden del coeficiente correspondiente de A; una función cualquiera cuyo índice está aumentado en *n* es, pues, igual a los coeficientes de los desarrollos de la enésima potencia del binomio, multiplicados respectivamente por la propia función, y sus diferencias sucesivas, lo que da lugar a la interpolación de series mediante las diferencias de sus términos consecutivos.

Suponiendo siempre que B es igual a la unidad dividida por la variable y C una función cualquiera de dicha variable, C será la misma función del cociente de la unidad dividida por B. Si de aquí se extrae la expresión de la enésima potencia de B, en una serie desarrollada se-

gún las potencias de C, pasando de las funciones generatrices a los coeficientes, se tendrá una función cualquiera cuyo índice está aumentado en *n*, igual a una serie en la que el primer término será el primer término de la serie precedente, multiplicado por la función misma, y los siguientes, los de la misma serie, sólo que, en lugar de las potencias de C, se escriben las mismas potencias de la característica relativa a C, seguidas de la función. Si se supone que uno de los términos de esta nueva serie es igual a cero, todos los términos siguientes serán nulos, y la suma de los términos precedentes será la integral completa de la ecuación diferencial indicada por esta igualdad. Se logra así la forma más sencilla de integrar este tipo de ecuaciones.

Imaginemos ahora que A sea una función de dos variables (siendo ampliable lo que vamos a decir a un número cualquiera de variables). Si se la desarrolla en una serie ordenada en relación a las potencias de esas variables y a sus productos, el coeficiente del producto de dos potencias cualesquiera de este desarrollo será una función de los índices de tales potencias, cuya función generatriz será A.

Si se multiplica A por otra función distinta, B, de esas dos variables, el coeficiente de las dos mismas potencias en el producto será una función derivada del coeficiente anterior, la cual podrá ser expresada por medio de una característica colocada delante de dicho coeficiente. Se podrá ver, como antes, que el coeficiente correspondiente, en el producto de A por una potencia cualquiera de B, será expresado por esta característica, colocada siempre delante del coeficiente relativo a A y a la que se asigna como exponente el de la potencia de B. De este hecho se siguen teoremas análogos a los relativos a una sola variable. Se podrá desarrollar de forma similar una función cualquiera de dos índices, aumentados, respectivamente, en los números *n* y *n'*, en una serie ordenada por respecto a las potencias de una característica, colocadas delante de la función sin incremento de índices y cuyo primer término es esta misma

función. Si uno de los términos de esta serie es igual a cero, todos los términos siguientes lo serán también, y la suma de estos términos será la integral de la ecuación de diferencias finitas parciales, dada por esta igualdad.

Siempre hay una función de las variables tal que, desarrollándola en serie, los coeficientes de los productos de sus potencias mantienen entre sí la relación dada por una ecuación de diferencias parciales. Esta función, que he denominado *función generatriz* de la ecuación propuesta, es generalmente fácil de obtener; todos los modos de desarrollarla en serie conducirán a la integral de dicha ecuación, adoptando diversas formas más o menos manejables según las circunstancias.

Si se tiene una serie ordenada respecto a las potencias de una variable y tal que el coeficiente de cada potencia sea, por ejemplo, la mitad del coeficiente de la potencia precedente, se podrá imaginar el intervalo entre los dos primeros términos lleno de una infinidad de términos en los que las potencias de la variable se incrementarán por grados infinitamente pequeños, desde el cero hasta la unidad, y tendrán coeficientes arbitrarios. Los intervalos de los términos consecutivos siguientes estarán igualmente llenos de una infinidad de otros, pero dependientes de los primeros, de suerte que el coeficiente de una potencia de la variable sea la mitad del coeficiente de la potencia menor en una unidad. Generalmente se suponen los intervalos de los primeros términos de cada serie llenos por ordenadas parabólicas; en ese caso, los demás intervalos están llenos de ordenadas semejantes, vinculadas a las precedentes por la ley general de la serie que, de este modo, contiene todas las potencias enteras y fraccionarias de la variable.

Supongamos ahora que A es una serie semejante y que B es igual a menos uno más la unidad dividida por una potencia *i* entera o fraccionaria de la variable; B será igual a la cantidad, menos uno más la potencia *i* del binomio uno más C. Si se multiplica la enésima potencia de esta cantidad por A, se obtendrá el producto de A por la enésima potencia de B. Si se desarrollan estas

potencias, se podrá pasar de las funciones generatrices a los coeficientes, 1.°) cambiando la enésima potencia de B, multiplicada por A, en la diferencia enésima de la función del índice, relativa a A, siendo *i* el incremento del índice; 2.°) cambiando de forma parecida el producto de A por una potencia de C de orden cualquiera en una diferencia del mismo orden de la misma función del índice, siendo la unidad el incremento del índice. De este modo se obtendrá la diferencia enésima de una función cualquiera de un índice cuyo incremento es *i*, expresada mediante una serie de diferencias de la misma función en las que la unidad es el incremento del índice, pudiéndose transformar así la característica relativa a un incremento del índice en una serie de características relativas a otro distinto.

De todo lo que antecede se desprende que las operaciones algebraicas relativas a las transformaciones de las funciones son trasladables a las características, asignándoles como exponentes los de las cantidades que les corresponden. Esta analogía, tan relevante y fecunda, entre las potencias y las características había sido ya advertida por Leibniz en las expresiones diferenciales. Lagrange [12], siguiendo esta idea leibniziana en todos sus desarrollos, ha derivado de ella fórmulas tan curiosas como útiles para el análisis, pero no ofreció las demostraciones de las mismas por considerarlas difíciles. La teoría de las funciones generatrices no deja nada que desear a este respecto, y además extiende a características cualesquiera la analogía que estos dos grandes geómetras habían observado únicamente en relación con las potencias y las diferencias.

---

12 G. L. Lagrange, uno de los más importantes matemáticos del momento, publica, en efecto, hacia 1770 una memoria dedicada a extender a las ecuaciones lineales de diferencias finitas el método de integración empleado para las ecuaciones diferenciales análogas. Más tarde, en otra memoria en la que aborda de nuevo este tema, publicada en 1777, Lagrange alude a su vez a Laplace, ensalzando la importante labor realizada por éste en este campo.

Si se consideran los incrementos de los índices infinitamente pequeños, los resultados relativos a sus incrementos finitos subsistirán siempre y se simplificarán rechazando los infinitamente pequeños que sean de un orden superior a aquel que se conserva. Este tránsito de lo finito a lo infinitamente pequeño tiene la ventaja de esclarecer ciertos puntos delicados del análisis infinitesimal que han sido objeto de grandes controversias entre los geómetras. Así es como he demostrado la posibilidad de introducir funciones discontinuas en las integrales de las ecuaciones por diferencias parciales, siempre que la discontinuidad se produzca únicamente para las diferenciales de las funciones del orden de tales ecuaciones. Los resultados que se siguen del cálculo son, como ocurre con todas las abstracciones del entendimiento, indicios generales cuya verdadera transcendencia sólo se puede conocer remontándose mediante el análisis metafísico a las ideas elementales que a ellos conducen, cosa que generalmente encierra grandes dificultades, teniendo en cuenta que al espíritu humano le cuesta replegarse sobre sí mismo todavía más que avanzar.

El paso de lo finito a lo infinitamente pequeño arroja mucha luz sobre la metafísica del cálculo diferencial. Merced a él se ve con toda claridad que este cálculo no es más que la comparación de los coeficientes de las mismas potencias de las diferenciales, en el desarrollo en serie de aquellas funciones cuyos índices son incrementados, respectivamente, en diferenciales indeterminadas. Las cantidades que se desprecian por ser de un orden de infinitésimos superior a aquel que se conserva y que, debido a esta omisión, parecen impedir a dicho cálculo el rigor del álgebra, no son otra cosa que potencias de diferenciales de orden superior al de aquellas cuyos coeficientes se comparan y que, por esta razón, deben ser eliminadas de dicha comparación; de este modo, el cálculo diferencial tiene toda la exactitud de las demás operaciones algebraicas. En sus aplicaciones a la geometría y a la mecánica es, sin embargo, indispensable introducir el principio de los límites. Así, por ejemplo,

siendo la subtangente de una curva el límite geométrico de la subsecante, o la línea a la que ésta se aproxima sin cesar, a medida que se acercan los puntos de intersección de la secante y de la curva, la expresión analítica de la subtangente debe ser el límite de la expresión analítica de la subsecante, siendo, por consiguiente, igual al primer término de esta expresión desarrollada según las potencias del intervalo que separa los dos puntos de intersección.

Cabe considerar a su vez la tangente como aquella recta cuya ecuación se aproxima lo más posible a la de la curva, en las inmediaciones del punto de contacto. Como la ordenada de esta curva es una función de la abscisa, si a partir de este punto se incrementa la abscisa en una cantidad indeterminada y se desarrolla la función según las potencias de esta indeterminada, se podrá ver que la suma de los dos primeros términos de este desarrollo es la ordenada de la recta más próxima a la curva y, por tanto, la ordenada de la tangente, expresando el coeficiente de la indeterminada en el segundo término la relación entre la ordenada y la subtangente. Con este principio de los límites es fácil demostrar que cualquier otra recta trazada por el punto de contacto se introduciría en la curva en las proximidades de dicho punto.

Esta forma tan afortunada de lograr la expresión de las subtangentes se debe a Fermat, el cual la amplió a las curvas transcendentes. Este gran geómetra expresa por medio de la característica E el incremento de la abscisa y no considerando más que la primera potencia del mismo, determina con toda la exactitud que permite el cálculo diferencial las subtangentes de las curvas, sus puntos de inflexión, los *máxima* y *mínima* de sus ordenadas y de las funciones racionales en general, y los centros de gravedad de los sólidos de revolución. Su bella solución al problema de la refracción de la luz, partiendo del supuesto de que pasa de un punto a otro en el tiempo más corto, y de que se mueve en los distintos medios diáfanos a diferente velocidad, permite ver

que incluso conocía la forma de extender su método a las funciones irracionales, desembarazándose de las irracionalidades por el procedimiento de elevar los radicales a potencias. Es a Fermat a quien debe considerarse, pues, como el verdadero inventor del cálculo diferencial [13]. Newton, en su cálculo de fluxiones, lo ha hecho después más analítico y ha logrado, con su bello teorema del binomio, generalizar y simplificar los procedimientos del mismo. Por último, Leibniz ha enriquecido, casi al mismo tiempo, el cálculo diferencial con una notación que, al indicar el paso de lo finito a lo infinitamente pequeño, une a la ventaja de expresar los resultados rigurosos de ese cálculo, la de dar los primeros valores aproximados de las diferencias y sumas de cantidades. Esta notación se ha adaptado por sí misma al cálculo de derivadas parciales. El lenguaje del análisis, el más perfecto de todos, es por sí mismo un poderoso instrumento de descubrimiento; sus notaciones, cuando son necesarias e ideadas con fortuna, constituyen el germen de nuevos cálculos. Así, la sencilla idea de Descartes de indicar las potencias representadas por letras escribiendo en la parte superior de tales letras los números que expresan los grados de esas potencias ha dado lugar al cálculo exponencial. Por otra parte, fue su notación lo que llevó a Leibniz a la singular analogía entre potencias y diferenciales. El cálculo de las funciones generatrices que, como acabamos de ver, constituye el verdadero germen de esta analogía, ofrece tantos ejemplos de este paso de las potencias a las características que puede incluso ser considerado como el cálculo exponencial de las características.

A menudo se ve uno llevado a expresiones que contienen tantos términos y factores que las sustituciones

13 Al igual que D'Alembert y que Lagrange, Laplace atribuye a Fermat la invención del cálculo diferencial. Sin embargo, aunque en su teoría de los máximos y mínimos y de las tangentes puede, efectivamente, verse prefigurado dicho cálculo, es a Leibniz a quien en realidad corresponde el mérito de haber expuesto la primera concepción formal del mismo.

numéricas son impracticables en ellas. Esto es lo que ocurre en las cuestiones de probabilidad cuando se considera un gran número de acontecimientos. Sin embargo, en este caso, es importante obtener el valor numérico de las fórmulas con objeto de conocer con qué probabilidad se indican los resultados que los acontecimientos producen al multiplicarse. Y es importante sobre todo hallar la ley según la cual esa probabilidad se aproxima sin cesar a la certeza que acabaría por alcanzar si el número de los acontecimientos resultara infinito. Para llegar a esta meta, partí de la consideración de que las integrales definidas de diferenciales multiplicadas por factores elevados a grandes potencias daban por integración fórmulas compuestas de gran número de términos y de factores. Esta observación me hizo concebir la idea de transformar en integrales parecidas las expresiones complejas del análisis y las integrales de las ecuaciones diferenciales. He logrado este objetivo merced a un método que proporciona a un tiempo la función comprendida en el signo integral y los límites de integración. Lo destacable de este método es que permite saber que esta función es la misma función generatriz de las expresiones y de las ecuaciones propuestas, cosa que lo vincula a la teoría de las funciones generatrices de la que no es sino el complemento. De lo único que se trataba ya es de reducir la integral definida a serie convergente. Es lo que he obtenido por un procedimiento que hace converger la serie con una rapidez tanto mayor cuanto más complicada es la fórmula que representa, de suerte que es tanto más exacto cuanto más necesario resulta. Generalmente, la serie tiene como factor la raíz cuadrada de la razón de la circunferencia al diámetro; algunas veces, depende de otras trascendentes cuyo número es infinito.

Una observación importante, que tiene que ver con la gran generalidad del análisis y que permite extender este método a las fórmulas y a las ecuaciones diferenciales que más usualmente presenta la teoría de probabilidades, es que las series a que se llega, suponiendo

reales y positivos los límites de las integrales definidas, tienen también lugar en el caso de que la ecuación que determina esos límites sólo tenga raíces negativas o imaginarias. Estos tránsitos de lo positivo a lo negativo y de lo real a lo imaginario, que he sido el primero en emplear, también me han conducido a los valores de varias integrales definidas singulares que luego he hallado directamente. Tales tránsitos pueden por tanto considerarse como medios de descubrimiento similares a la inducción y a la analogía, empleadas desde antiguo por los geómetras, primero con absoluta reserva, luego, después que gran número de ejemplos han justificado su empleo, con entera confianza. Sin embargo, siempre es conveniente confirmar con demostraciones directas los resultados obtenidos por estos distintos medios.

Al conjunto de métodos que anteceden le he dado el nombre de *cálculo de las funciones generatrices*. Dicho cálculo sirve de fundamento a la teoría de probabilidades que acabo de publicar.

Aplicaciones del cálculo de probabilidades
De los ingresos

Las combinaciones presentadas por los juegos han sido el objeto de las primeras investigaciones sobre las probabilidades. De entre la infinita variedad de tales combinaciones, muchas de ellas se prestan fácilmente al cálculo, otras entrañan más dificultades. Como estas dificultades van creciendo a medida que las combinaciones se van haciendo más complejas, el interés por solventarlas y la curiosidad han servido de estímulo a los geómetras para perfeccionar cada vez más este tipo de análisis. Antes hemos visto que, por medio de la teoría combinatoria, se podían determinar sin dificultad los beneficios de una lotería. Pero averiguar a cuántos sorteos se puede apostar, por ejemplo, uno contra uno a que saldrán todos los números resulta ya más difícil. Siendo n el total de los números, r el de los que salen en cada

sorteo e *i* el número, no conocido, de sorteos, la expresión de la probabilidad de que salgan todos los números depende de la diferencia finita enésima de la potencia *i* del producto de *r* números consecutivos. Cuando el número *n* es muy grande, la búsqueda del valor de *i,* que equipara esta probabilidad a 1/2, resulta imposible, salvo que se convierta esa diferencia en una serie muy convergente. Esto es lo que logra hacer con éxito el método antes indicado para las aproximaciones de las funciones de números muy grandes. Nos encontramos así con que, al estar compuesta la lotería de diez mil números, de los que en cada sorteo no sale más que uno, apostar uno contra uno a que saldrán todos los números en 95767 sorteos resulta desventajoso, mientras que es ventajoso hacer la misma apuesta para 95768 sorteos. En la lotería francesa, esa apuesta es desventajosa para 85 sorteos y ventajosa para 86.

Consideremos ahora dos jugadores jugando juntos a *cara o cruz* de tal modo que, en cada jugada, si sale *cara,* A le da una ficha a B, y B se la da a A, si sale *cruz;* el número de fichas de B es limitado, en tanto que el de A es ilimitado, y la partida no se acaba mientras B tenga todavía fichas. Se trata de averiguar en qué número de jugadas cabe apostar uno contra uno a que acabará la partida. La expresión de la probabilidad de que la partida acabará en un número *i* de jugadas viene dada por una serie que contiene numerosos términos y factores, en caso de que el número de fichas de B sea considerable; la búsqueda del valor de la incógnita *i,* que hace esta serie igual a 1/2, sería por tanto imposible en este caso, si no se lograra reducir dicha expresión a una serie muy convergente. Aplicándole el método que acabamos de mencionar nos encontramos con una expresión muy simple de la incógnita, de la cual se desprende que si, por ejemplo, B tiene cien fichas, se puede apostar un poco menos de uno contra uno a que la partida terminará en 23780 jugadas, y un poco más a que terminará en 23781.

Estos dos ejemplos, junto con los otros dados, bastan para mostrar de qué modo los problemas de juegos han podido contribuir a la perfección del análisis.

De las desigualdades desconocidas que pueden existir entre posibilidades supuestamente iguales.

Las desigualdades de este tipo tienen sobre los resultados del cálculo de probabilidades una sensible influencia que merece especial atención. Consideremos el juego de *cara o cruz* y supongamos que es igual de fácil sacar una u otra cara de la moneda. En este caso, la probabilidad de sacar *cara* en la primera jugada es 1/2 y la de sacarla dos veces seguidas, 1/4. Sin embargo, si la moneda posee una falta de uniformidad que hace que aparezca una de las caras más que la otra sin que se sepa cuál es la cara favorecida por la misma, la probabilidad de obtener cara en la primera jugada seguirá siendo 1/2, pues, al desconocer cuál es la cara favorecida por dicha desigualdad, la probabilidad del acontecimiento simple lo mismo se ve aumentada, si esta desigualdad le es favorable, como disminuida, si la desigualdad le es contraria. Pero aun dándose esta situación de ignorancia, la probabilidad de sacar *cara* dos veces seguidas aumenta. En efecto, esta probabilidad es la de sacar cara en la primera jugada, multiplicada por la probabilidad de que, al haberla sacado en la primera jugada, se la sacará en la segunda; pero como el que haya salido en la primera jugada es un motivo para creer que la desigualdad de la moneda la favorece, la irregularidad desconocida aumenta entonces la probabilidad de sacar cara en la segunda jugada e incrementa, por tanto, el producto de las dos probabilidades. Para calcular esta posibilidad, supongamos que esta desigualdad aumenta en un vigésimo la probabilidad del acontecimiento simple por ella favorecido. Si este acontecimiento es *cara,* su probabilidad será 1/2 más 1/20, esto es, 11/20, y la de sacarla dos veces seguidas será 11/20 elevado al cuadrado, es decir 121/400. Si el acontecimiento favorecido es *cruz,* la proba-

bilidad de que salga cruz será 1/2 menos 1/20, es decir, 9/20, y la de sacarla dos veces seguidas será 81/400. Como en principio no hay ninguna razón para creer que la desigualdad favorece a uno de estos dos acontecimientos más que al otro, es evidente que para obtener la probabilidad del acontecimiento compuesto *cara cara,* es preciso unir las dos probabilidades precedentes y tomar la mitad de su suma, lo que da como resultado 101/400 para esta probabilidad que excede a 1/4 en 1/400, esto es, en el cuadrado de 1/20, que es el incremento que la desigualdad agrega a la posibilidad del acontecimiento que favorece. La probabilidad de sacar *cruz cruz* es también 101/400, pero las de sacar *cara cruz* o *cruz cara* no son más que 99/400 cada una de ellas, ya que la suma de estas cuatro probabilidades tiene que ser igual a la unidad, o lo que es lo mismo, a la certeza. Vemos así que, en general, las causas constantes y desconocidas que favorecen los acontecimientos simples que se consideran igual de posibles aumentan siempre la probabilidad de la repetición de un mismo acontecimiento simple.

La probabilidad de sacar *cara o cruz* dos veces en un número par de jugadas es 1/2 si las probabilidades de ambas caras son iguales. Pero si entre ellas existe una desigualdad de forma que la probabilidad de una de ellas sea, por ejemplo, 11/20, la de la otra será 9/20; la probabilidad de que salga *cara cara* o *cruz cruz* será la suma de los cuadrados de 11/20 y 9/20, cualquiera que sea la cara favorecida por la desigualdad desconocida. Esta suma es 101/200 o 1/2 más 1/200, con lo que la probabilidad de sacar *cara* o *cruz* dos veces en un par de jugadas se ve aumentada por esta desigualdad. En general, ésta favorece al que apuesta a que salen *cara* o *cruz* un número par de veces en un número par de jugadas y es desfavorable al jugador que apuesta a que salen un número impar de veces.

Dos jugadores que se suponen de la misma destreza juegan aceptando como condición que, en cada jugada, el que pierda le dará una ficha a su adversario y que la partida no se termina mientras a uno de los jugadores

le queden fichas. El cálculo de probabilidades nos muestra que, para que el juego sea equitativo, los jugadores han de poner en razón inversa de sus fichas. Pero si entre sus respectivas habilidades hay alguna pequeña desigualdad desconocida, ésta favorecerá a aquel de los jugadores que tenga el menor número de fichas. Si los jugadores acordasen duplicar o triplicar sus fichas, la probabilidad de aquel de ganar la partida aumentaría, llegando a 1/2, es decir, a equipararse a la del otro jugador, en el caso de que el número de sus fichas llegara a alcanzar, sin perder la misma proporción, la cifra de infinito.

Se puede corregir la influencia de estas desigualdades no conocidas sometiéndolas a la suerte del azar. Así, por ejemplo, si en el juego de *cara o cruz* se cuenta con una segunda moneda que se arroja siempre a la vez que la primera y se conviene en denominar siempre *cara* al lado del que caiga, la probabilidad de obtener *cara* dos veces seguidas con la primera moneda se aproximará a 1/4 mucho más que en el caso de una sola. En este último caso, la diferencia es el cuadrado del pequeño incremento de posibilidad que la desigualdad ofrece a la cara de la primera moneda por ella favorecida, mientras que, en el otro, esta diferencia es el cuádruple producto de este cuadrado por el cuadrado correspondiente relativo a la segunda moneda.

Si se introducen en una urna cien números, de uno a cien, en el orden de la numeración y, después de agitar bien la urna con el fin de mezclar los números, se saca uno, es evidente que, si la mezcla ha sido bien hecha, las probabilidades que tienen de salir estos números son las mismas para todos. Pero si se teme que entre ellas pueda haber pequeñas diferencias dependientes del orden en el cual se han introducido los números en la urna, se podrán reducir considerablemente estas diferencias introduciendo en una segunda urna estos números según el orden en que van saliendo de la primera y agitándola después para mezclarlos. Una tercera urna, una

cuarta, etc., disminuirán cada vez más estas diferencias, ya apenas perceptibles en la segunda urna.

De las leyes de la probabilidad que resultan de la multiplicación indefinida de acontecimientos.

En medio de las causas variables y desconocidas que agrupamos bajo el nombre de *azar,* que tan incierta e irregular hacen la marcha de los acontecimientos, se aprecia, a medida que se multiplican, una notable regularidad que parece obedecer a un designio y que se ha considerado como una prueba de la providencia que gobierna el mundo. Pero si uno reflexiona sobre ello, enseguida se da cuenta de que esta regularidad no es más que el desarrollo de las respectivas posibilidades de los acontecimientos simples, los cuales tienen que presentarse más a menudo cuando son más probables. Imaginemos, por ejemplo, una urna que contiene bolas blancas y bolas negras y supongamos que cada vez que se saca una bola se la vuelve a meter de nuevo en la urna para proceder a una nueva extracción. Lo más normal es que la relación entre el número de bolas blancas y el de bolas negras extraídas sea muy irregular en las primeras extracciones, pero las distintas causas de esta irregularidad producen efectos alternativamente favorables y contrarios a la marcha regular de los acontecimientos que, al destruirse mutuamente en el conjunto de un número elevado de extracciones, dejan entrever cada vez con más claridad la relación entre las bolas blancas y las bolas negras contenidas en la urna o, lo que es lo mismo, las posibilidades respectivas de extraer una bola blanca y una negra en cada extracción. De aquí se desprende el teorema siguiente:

La probabilidad de que la razón entre el número de bolas blancas extraídas y el total de bolas salidas no se aparte de la probabilidad de extraer una bola blanca en cada extracción más allá de un cierto intervalo, se aproxima indefinidamente a la certeza por la multiplicación

indefinida de los acontecimientos, por pequeño que se suponga dicho intervalo [14].

Este teorema, indicado por el buen sentido, era difícil de demostrar de un modo analítico. Por eso, el ilustre geómetra Jacques Bernoulli, que fue el primero en ocuparse de él, concedía una gran importancia a la demostración que había dado de él. El cálculo de las funciones generatrices, aplicado a este tema, no sólo permite demostrar fácilmente este teorema, sino que, además, permite obtener la probabilidad de que la relación de los acontecimientos observados no se aparte más allá de ciertos límites de la verdadera relación de sus posibilidades respectivas.

De este teorema puede extraerse una consecuencia que debe ser vista como una ley general, a saber, que las relaciones de los efectos de la naturaleza son prácticamente constantes cuando dichos efectos se consideran en un número grande. Así, pese a las variedades anuales, la suma de las producciones obtenidas durante un gran número de años, es prácticamente la misma, de tal manera que el hombre, con una útil previsión, puede precaverse contra la irregularidad de las estaciones, distribuyendo en todas las épocas por igual los bienes que la naturaleza prodiga de forma desigual. No exceptúo de la ley anterior los efectos debidos a causas morales. La relación entre los nacimientos anuales y la población y la que media entre los casamientos y los nacimientos en

[14] Se trata del famoso «teorema de Bernouilli», más tarde bautizado con el nombre de «ley de los grandes números» por Paisson en sus *Recherches sur la probabilité des jugements* (París, 1837, pp. 7-8). Jacques Bernouilli, el primer miembro de toda una saga familiar de matemáticos, lo enuncia y demuestra en la cuarta parte de su célebre obra *Ars Conjectandi,* publicada ocho años después de su muerte, en la que no sólo defiende las posibles aplicaciones directas de dicho teorema, sino que también sugiere la posibilidad de hacer un uso inverso del mismo, cosa que Leibniz se negaba a admitir, como se desprende de la interesante correspondencia mantenida entre ambos (*Leibnizens Mathematische Schiften herangegeben von C. I. Gerhardt,* Erste Abtheilung. Halle, 1855, pp. 83-87).

el imperio francés experimentan variaciones sólo muy ligeras; en París, el número de nacimientos anuales ha sido siempre prácticamente el mismo, y he oído decir que, en tiempos normales, el número de cartas arrumbadas en el correo por fallos en las direcciones cambia poco cada año.

Se sigue también de este teorema que, en una serie de acontecimientos prolongada de forma indefinida, la acción de las causas regulares y constantes, a la larga, ha de prevalecer sobre la de las causas irregulares. Esto es lo que hace a las ganancias de la lotería tan seguras como los productos de la agricultura: las probabilidades que se reservan les aseguran un beneficio dentro del conjunto de un gran número de apuestas. De este modo, como las probabilidades favorables y numerosas van constantemente vinculadas a la observancia de los principios eternos de razón, justicia y humanidad que constituyen el fundamento y sostén de las sociedades, en la conducta, resulta sumamente ventajoso conformarse a esos principios y desventajoso apartarse de ellos. Basta con consultar la historia, así como la propia experiencia, para ver cómo todos los hechos vienen en apoyo de este resultado del cálculo. De igual modo, en medio de las diversas causas que extienden o reducen el ámbito de los distintos estados, los límites naturales, al actuar como causas constantes, han de acabar prevaleciendo siempre. De ahí que sea igual de importante para la estabilidad que para el bienestar de los imperios el que no se los extienda más allá de los límites a los que se ven incesantemente abocados por la acción de esas causas, igual que las aguas de los mares, agitadas por violentas tempestades, son devueltas a su cauce por la acción de la gravedad. Se trata también de un resultado del cálculo de probabilidades, confirmado por numerosas y funestas experiencias. La historia, abordada desde el punto de vista de la influencia de las causas constantes, además del interés que encerrara desde el punto de vista de la curiosidad, tendría el de ofrecer a la humanidad lecciones de la máxima utilidad. Muchas veces, los efectos inevitables

de estas causas se atribuyen a circunstancias accidentales que lo único que han hecho es desarrollar su acción. Por ejemplo, es contrario a la naturaleza de las cosas que un pueblo sea gobernado eternamente por otro separado de él por un vasto mar o una gran distancia. Se puede afirmar que, a la larga, esta causa constante, en continua unión con las causas variables que actúan en el mismo sentido y que el curso del tiempo desarrolla, acabará por adquirir la suficiente fuerza como para restituir al pueblo sometido su independencia natural o para vincularlo a un estado poderoso contiguo a él.

En un gran número de casos, que son precisamente los más importantes del análisis del azar, las posibilidades de los acontecimientos simples nos son desconocidas, por lo que no tenemos más remedio que buscar en los acontecimientos pasados indicios que puedan guiarnos en nuestras conjeturas sobre las causas de las que dependen. Aplicando el análisis de las funciones generatrices al principio expuesto antes acerca de la probabilidad de las causas inferida de los acontecimientos observados, llegamos al teorema siguiente:

Cuando un acontecimiento simple o compuesto de varios acontecimientos simples, como, por ejemplo, una partida de un juego, se repite un gran número de veces, las posibilidades de los acontecimientos simples que convierten en lo más probable aquello que se ha observado son las que la observación indica con más verosimilitud; a medida que el acontecimiento observado se repite, esta verosimilitud aumenta y acabaría por confundirse con la certeza si el número de repeticiones llegara a ser infinito.

Hay aquí dos clases de aproximaciones; una de ellas es relativa a los límites, de uno y otro lado, de las posibilidades que confieren al pasado la mayor verosimilitud; la otra tiene que ver con la probabilidad de que tales posibilidades caigan dentro de tales límites. La repetición del acontecimiento compuesto aumenta cada vez más esta probabilidad, caso de que los límites se mantengan idénticos, y reduce cada vez más el intervalo en-

tre esos límites, caso de que la probabilidad siga siendo la misma. En el infinito, este intervalo se convierte en nulo y la probabilidad se transforma en certeza.

Si aplicamos este teorema a la relación entre los nacimientos de niños y los de niñas observada en los distintos lugares de Europa, nos encontramos con que esta relación, aproximadamente igual en todas partes a la de 22 a 21, indica con una probabilidad extrema una mayor facilidad para los nacimientos de niños. Considerando luego que es la misma en Nápoles que en San Petersburgo, podremos ver que la influencia del clima es insensible a este respecto. Cabe, por tanto, suponer, en contra de la opinión general, que esta superioridad de nacimientos masculinos se mantiene en el mismo Oriente. Yo había invitado por eso a los sabios franceses enviados a Egipto a que se ocuparan de esta interesante cuestión, pero las dificultades para obtener datos precisos sobre los nacimientos no les ha permitido resolverla [15].

Como la relación entre los nacimientos de niños y los de niñas difiere muy poco de la unidad, pudiera ocurrir que incluso números bastante grandes de nacimientos observados en un lugar ofreciesen en este sentido un resultado contrario a la ley general, sin que esto nos diera derecho a concluir que dicha ley no existe. Para poder sacar esta consecuencia es preciso emplear números muy grandes y asegurarse de que está indicada con una gran probabilidad. Así, por ejemplo, Buffon cita en

[15] La preocupación de Laplace por los temas demográficos fue muy grande, como se desprende de su memoria *Sur les naissances, les mariages et les morts à Paris depuis 1771 jusqu'en 1784 et dans toute l'etendue de la France pendant les années 1781 et 1782,* cuyo objeto es precisamente aplicar a los problemas de población las técnicas matemáticas que había introducido en sus dos memorias anteriores. A él se debe también, al menos en parte, la decisión, tomada por la Academia de Ciencias, de insertar en sus memorias anuales un resumen de los nacimientos, matrimonios y defunciones ocurridos en todo el territorio nacional, resumen que, efectivamente, aparece en los últimos volúmenes publicados por la Academia en tiempos del Antiguo Régimen, con el título de *Essai pour connaître la population du royaume.*

su aritmética política varias comunas de Borgoña en las que los nacimientos de niñas han sobrepasado a los de niños. Entre estas comunas, la de Carcelle-le-Grignon presenta, sobre un total de 2009 nacimientos durante cinco años, el resultado de 1026 niñas y 983 niños. Aunque estas cifras no dejan de ser elevadas, sin embargo indican una posibilidad mayor en los nacimientos de niñas solo con una probabilidad de 9/10, la cual, menor que la de no obtener *cara* cuatro veces seguidas en el juego de *cara o cruz*, no es suficiente para averiguar la causa de una anomalía que, con toda verosimilitud, desaparecería si se observaran durante un siglo los nacimientos de dicha comuna.

Los registros de nacimientos, que se llevan con cuidado para garantizar el estado de los ciudadanos, pueden servir para determinar la población de un gran imperio, sin necesidad de recurrir al recuento de sus habitantes, operación penosa y difícil de realizar con exactitud. Pero, para ello, es preciso conocer la relación entre la población y los nacimientos anuales. El medio más preciso de lograrlo consiste en 1) seleccionar dentro del imperio departamentos distribuidos por toda su superficie de forma más o menos igual, con el fin de obtener un resultado general independiente de las circunstancias locales; 2) hacer, para un período de tiempo determinado, un cuidadoso recuento de los habitantes de algunas de las comunas de estos departamentos; 3) determinar, por medio de la relación de los nacimientos ocurridos unos años antes y después de esta época, el número medio correspondiente a los nacimientos anuales. Dividiendo este número por el de los habitantes, se obtendrá la relación entre los nacimientos anuales y la población, de una forma tanto más segura cuanto mayor sea el censo. El gobierno, convencido de la utilidad de un censo así, ha tenido a bien ordenar, a instancias mías, la ejecución del mismo. En treinta departamentos, esparcidos por igual por toda Francia, se han elegido aquellas comunas que podían suministrar los datos más precisos. Sus censos

han dado 2.037.615 individuos como suma total de sus habitantes el 23 de septiembre de 1802. Los registros de los nacimientos ocurridos en dichas comunas los años 1800, 1801 y 1802 arrojan estas cifras:

Nacimientos	*Matrimonios*	*Defunciones*
110.312 niños	46.037	103.659 hombres
105.287 niñas		99.443 mujeres

La relación entre la población y los nacimientos anuales es, por consiguiente, 28 352.845/1.000.000; mayor, por tanto, de lo que hasta ahora se había estimado. Multiplicando esta relación por el número de los nacimientos anuales que tienen lugar en el imperio francés, tendremos la población de dicho imperio. Pero ¿cuál es la probabilidad de que la población así determinada no se aparte de la real más allá de un cierto límite? Resolviendo este problema y aplicando a su solución los datos anteriores, he averiguado que, suponiendo que el número de nacimientos anuales en Francia fuera de un millón y medio, lo que eleva su población a 42.529.267 de habitantes, se puede apostar 1.161 contra uno a que el error de ese resultado no excede de medio millón.

La relación entre los nacimientos de niños y los de niñas que ofrece el cuadro anterior es de 22 a 21, y los matrimonios están con los nacimientos en la proporción de tres a catorce.

En París, los bautismos de niños de ambos sexos se aparta un poco de la relación de 22 a 21. Desde 1745, época en la que se comenzó a hacer una distinción de sexos en los registros de nacimientos, hasta finales de 1784, se bautizaron en esta capital 393.386 niños y 377.555 niñas. La relación entre estas dos cifras es aproximadamente de 25 a 24; parece, pues, que en París alguna causa específica acerca a la igualdad los bautismos de ambos sexos. Si aplicamos a este problema el cálculo de probabilidades, nos encontramos con que hay

238 posibilidades contra una en favor de la existencia de tal causa, lo que es suficiente para justificar su búsqueda. Reflexionando acerca de ella, he llegado a la conclusión de que la diferencia observada se debe a que las gentes del campo y de provincias, viendo alguna ventaja en retener cerca de sí a los niños, habían enviado al Hospicio de Niños Expósitos de París un número menor de niños que de niñas comparativamente a lo que marca la proporción entre los nacimientos de uno y otro sexo. Esto es lo que me ha confirmado la lista de registros de tal hospicio. Desde comienzos de 1745 hasta finales de 1809 han entrado en él 163.499 niños y 159.405 niñas. El primero de estos números no excede más que en un treinta y ochoavos al segundo, al que habría debido de sobrepasar por lo menos en un veinticuatroavos. Lo que confirma la existencia de la causa señalada es que, sin tener en cuenta a los niños abandonados, la proporción entre el nacimiento de niños y el de niñas es en París de 22 a 21, lo mismo que en el resto de Francia.

La constancia de la superioridad de los nacimientos de niños sobre los de niñas en París y Londres, desde que se los observa, ha sido considerada por algunos sabios como una prueba de la providencia, sin la cual, a su juicio, las causas irregulares, que perturban incesantemente la marcha de los acontecimientos, hubieran debido hacer que los nacimientos anuales de niñas superaran a los de los niños. Pero esta prueba es un ejemplo más del abuso que tan frecuentemente se ha hecho de las causas finales, las cuales terminan siempre por desaparecer una vez que se someten los problemas a un examen profundo, cuando se tiene los datos necesarios para resolverlos. La constancia en cuestión no es sino resultado de causas regulares que confieren superioridad a los nacimientos de los niños y que prevalecen sobre las anomalías debidas al azar cuando el número de nacimientos anuales es considerable. La investigación de la probabilidad de que esta constancia se mantendrá durante un largo período de tiempo pertenece a esa rama

del análisis del azar que se remonta de los acontecimientos pasados a la probabilidad de los futuros, y lo que de aquí se desprende es que, partiendo de los nacimientos observados entre 1745 y 1784, se puede apostar cerca de cuatro contra uno a que en París los nacimientos anuales de niños sobrepasarán de forma constante durante un siglo a los de niñas; no hay, por tanto, ninguna razón para extrañarse de que tal cosa haya ocurrido durante medio siglo.

Demos otro ejemplo más del desarrollo de las relaciones constantes que presentan los acontecimientos a medida que se multiplican. Imaginemos una serie de urnas dispuestas en círculo y conteniendo cada una de ellas un buen número de bolas blancas y negras, pudiendo ser las relaciones entre ellas inicialmente muy distintas en las diferentes urnas y tales que, por ejemplo, una de esas urnas no contenga más que bolas blancas, mientras que otra sólo contiene bolas negras. Si de la primera urna se extrae una bola para meterla en la segunda, y de ésta, una vez agitada con el fin de mezclar bien la bola añadida con las otras, se extrae otra bola para meterla en la tercera urna, y así sucesivamente hasta llegar a la última urna de la que se extrae una bola para meterla en la primera, recomenzando indefinidamente esta serie de extracciones, el análisis de probabilidades nos muestra que las relaciones entre las bolas blancas y las negras en tales urnas terminarán por ser las mismas e iguales a la relación entre la suma de todas las bolas blancas y la de todas las bolas negras contenidas en ellas. De este modo, mediante esa forma regular de variación, a la larga, la primitiva irregularidad de esas relaciones acabará por desaparecer para dar lugar al orden más simple. Si ahora se intercalan entre esas urnas otras nuevas en las que la relación entre la suma de bolas blancas y la de negras, contenidas en ellas, difiere de la anterior, entonces, si continuamos realizando indefinidamente las extracciones que acabamos de indicar en el conjunto de todas estas urnas, el orden simple establecido en las antiguas se verá primero perturbado y las relaciones entre las bolas blancas y las negras se harán muy irregulares, pero, poco a poco, esta irregularidad irá desapareciendo para dar lugar a un nuevo orden que acabará por ser el de la igualdad de las relaciones entre las bolas blancas y las bolas negras contenidas en las urnas. Estos resultados son extensibles a todas las combinaciones de la naturaleza en las que las fuerzas constantes que animan a los elementos de que están compuestas establecen modos regulares de acción y de cambio.

Los fenómenos que más parecen depender del azar, al multiplicarse, manifiestan, pues, una tendencia a aproximarse incesantemente a relaciones fijas, de suerte que, si a ambos lados de cada una de estas relaciones se imagina un intervalo tan pequeño como se quiera, la probabilidad de que el resultado medio de las observaciones caiga en este intervalo acabará por no diferir de la certeza más que en una cantidad menor que cualquiera asignable. El cálculo de probabilidades, aplicado a un gran número de observaciones, permite conocer de este modo la existencia de tales relaciones. Pero, para no extraviarse en vanas especulaciones, antes de investigar sus causas, es preciso asegurarse de que se hallan indicadas con una probabilidad que no permite considerarlas como anomalías debidas al azar. La teoría de las funciones generatrices logra una expresión muy simple de esta probabilidad, la cual se obtiene integrando el producto de la diferencial de la cantidad cuyo resultado, deducido de un gran número de observaciones, se aparta de la verdad en una constante menor que la unidad, dependiente de la naturaleza del problema y elevada a una potencia cuyo exponente es la relación entre el cuadrado de esta diferencia y el número de observaciones. La integral tomada entre unos límites dados, y dividida por la misma integral extendida al infinito tanto positivo como negativo, expresará la probabilidad de que la discrepancia de la verdad esté comprendida entre dichos límites. Tal es la ley general de la probabilidad de los resultados indicados por un gran número de observaciones.

Del cálculo de probabilidades, aplicado a la investigación de los fenómenos y de sus causas.

La mayoría de las veces, los fenómenos de la naturaleza están rodeadas de tantas circunstancias extrañas, mezclados con la influencia de tan gran número de causas perturbadoras, que resulta muy difícil, cuando son muy pequeños, detectarlos. La única forma en que se lo puede lograr es multiplicando las observaciones, a fin de que, al llegar a destruirse los efectos extraños, los resultados medios evidencien tales fenómenos. De lo que antece se deduce que esto no tiene lugar de forma rigurosa más que en el caso de que el número de observaciones sea infinito; en todos los demás casos, los resultados medios indican los fenómenos con una probabilidad tanto más elevada cuanto mayor sea el número de las observaciones y cuyo valor es importante determinar.

Tomemos como ejemplo la variación diurna de la presión de la atmósfera en el ecuador, donde es más sensible y fácil de reconocer, siendo allí los cambios irregulares del barómetro más considerables. Pronto se observó, en la altura del mismo, una pequeña oscilación diurna, cuyo máximo tiene lugar hacia las nueve de la mañana y el mínimo hacia las cuatro de la tarde. Un segundo máximo tiene lugar hacia las once de la tarde y el mínimo hacia las cuatro de la mañana. Las oscilaciones nocturnas son menores que las diurnas, cuya amplitud es de dos milímetros. La inconstancia de nuestros climas no ha impedido a nuestros observadores constatar esta variación, aunque sea menos sensible en ellos que entre los trópicos. Aplicando el cálculo de probabilidades a las numerosas y precisas observaciones realizadas por Ramond, durante varios años consecutivos, he hallado que aquellas indican la existencia y cantidad de este fenómeno de una forma absolutamente indudable. Dado que su período de variación es de un día solar, es evidente que su causa es el calor que el sol comunica a las diversas partes de la atmósfera, aun cuando sea prácticamente imposible calcular sus efectos. Este astro también actúa por medio de su atracción sobre este fluido, produciendo, junto con la luna, oscilaciones parecidas a las del flujo y reflujo del mar, oscilaciones cuyas leyes he determinado en la *Mecánica celeste* [16] y que algún día podrán ser constatadas a través de numerosas observaciones realizadas con buenos barómetros.

Por el análisis de probabilidades se puede verificar también la existencia o la influencia de ciertas causas cuya acción sobre los seres organizados se ha creído observar. De todos los instrumentos que podemos emplear para conocer los agentes imperceptibles de la naturaleza, los más sensibles son los nervios, especialmente cuando su sensibilidad se ve excitada por causas concretas. Es por medio de ellos como se ha descubierto la escasa electricidad que produce el contacto de dos metales heterogéneos, descubrimiento que ha abierto un amplio campo a la investigación de físicos y químicos. Los especiales fenómenos que se producen como consecuencia de la ex-

16 La *Mécanique Céleste* es un gran tratado compuesto de cinco volúmenes, en el que Laplace recoge y generaliza los resultados más importantes a que había llegado en el área de la mecánica y de la física. Los cuatro primeros volúmenes, aparecidos entre 1799 y 1805, contienen una generalización de las leyes de la mecánica para su aplicación a los movimientos y figuras de los cuerpos celestes. Las últimas partes del cuarto y el quinto aparecieron bastante más tarde, concretamente, entre 1823 y 1825, e incluyen importante material sobre la física, tercera de las áreas de trabajo por la que se interesó Laplace a raíz de su colaboración con Lavoisier. Sus contribuciones más importantes hay que situarlas, no obstante, en el área de la mecánica, en la que, prosiguiendo el trabajo emprendido por Newton, logró establecer la estabilidad del sistema solar. En efecto, Newton había observado anomalías en los movimientos de Saturno y Júpiter, de las que su sistema no podía dar cuenta. Esto le llevó a pensar en la necesidad de una mano poderosa que debía intervenir para volver a colocar en su sitio los cuerpos que se habían desviado. Laplace logró demostrar, ya en 1773, que los movimientos y las distancias medias entre los planetas son invariables o están sometidos a pequeñas variaciones periódicas. Posteriormente, entre 1784 y 1787, logró demostrar que no eran más que perturbaciones periódicas que dependían de la ley de atracción. Esto le permitió concluir que el sistema era estable y Dios, una hipótesis inútil.

tremada sensibilidad de los nervios en algunos individuos han dado lugar a diversas opiniones acerca de la existencia de un nuevo agente, denominado *magnetismo animal,* así como acerca de la acción del magnetismo ordinario y la influencia del sol y de la luna en ciertas afecciones nerviosas, y hasta sobre las impresiones a que puede dar lugar la proximidad de metales o de una corriente de agua. Es natural pensar que la acción de estas causas es muy débil y que puede verse fácilmente perturbada por gran número de circunstancias accidentales, razón por la que no se debe de rechazar su existencia por el hecho de que no se haya manifestado en algunos casos. Estamos tan lejos de conocer todos los agentes de la naturaleza y sus diversos tipos de acción que no sería muy filosófico negar los fenómenos por el hecho de que en el estado actual de nuestros conocimientos resulten inexplicables. Lo que debemos hacer más bien es examinarlos con una atención tanto más escrupulosa cuanto más difícil resulte admitirlos, y es en este punto en donde el cálculo de probabilidades resulta indispensable para determinar hasta qué punto es preciso multiplicar las observaciones o las experiencias con el fin de obtener, en favor de los agentes que indican, una probabilidad superior a las razones que pueda haber para no admitirlos.

El cálculo de probabilidades puede servir para apreciar las ventajas y los inconvenientes de los métodos empleados en las ciencias conjeturales. Así, para determinar cuál es el mejor de los tratamientos empleados en la cura de una enfermedad, basta con experimentar cada uno de ellos sobre un mismo número de enfermos, convirtiendo en absolutamente análogas todas las circunstancias. La superioridad del tratamiento más ventajoso se irá manifestando con mayor claridad a medida que este número aumente, permitiéndonos el cálculo conocer la probabilidad correspondiente a su ventaja. El mismo cálculo se extiende también a los objetos de la economía política, para la que las operaciones de los gobiernos constituyen otras tantas experiencias a lo grande, aptas para el esclarecimiento de la conducta que se ha de seguir en casos semejantes a los que se han presentado ya. En las instituciones humanas influyen tantas causas imprevistas, ocultas o inapreciables, que resulta imposible juzgar *a priori* los resultados de las mismas. Una larga serie de experiencias desarrolla los efectos de esas causas e indica la forma de remediar aquellos que son nocivos. En este sentido, no han dejado de dictarse algunas veces sabias leyes, pero, como no se ha tenido la precaución de preservar las razones para ello, muchas de ellas han sido derogadas por inútiles y, para restablecerlas, ha sido preciso que ciertas experiencias molestas hayan hecho sentir de nuevo su necesidad. Esta es la razón por la que es muy importante que en cada rama de la administración pública haya un registro minucioso de los efectos que han producido los diversos medios de los que se ha hecho uso. Apliquemos a las ciencias políticas y morales el método, basado en la observación y el cálculo, que tan útil nos ha sido en las ciencias naturales [17]. Seamos ex-

[17] Con este párrafo de Laplace se inicia, precisamente, el volumen II de *Sur l'homme et le développment de ses facultés. Essai de Physique social,* la obra de Quételet donde se hacen realidad los deseos de Condorcet de aplicar a las ciencias morales y sociales las mismas técnicas que tan buenos resultados habían dado en el campo de los fenómenos naturales. Quételet cifraba sus esperanzas de poder hacer una «Física social» en la identificación y especificación de lo que él llama «el hombre medio», entendiendo por tal aquel que «es en la sociedad similar al centro de gravedad en el cuerpo. Es la media en torno a la cual oscilan los elementos sociales; será, si se quiere, un ser ficticio para quien todas las cosas sucederán conforme a los resultados medios obtenidos para la sociedad» (*Ibid.,* 1836, I, p. 21). También Poisson fue consciente de la posibilidad de aplicar estas técnicas a las «cosas morales» y así, hablando de la ley de los grandes números dice: «Por lo demás, al ser esta ley la base de todas las aplicaciones del cálculo de probabilidades, nos permite darnos cuenta de su independencia de la naturaleza de los problemas y de su completa similitud, se trate de cosas físicas o de cosas morales, con tal de que los datos específicos que exige el cálculo en cada problema nos sean suministrados por la observación» (*Recherches sur la probabilité des jugements,* 1837, p. 12).

tremadamente circunspectos a la hora de cambiar nuestras antiguas instituciones, así como las costumbres a las que nuestras opiniones y hábitos se han replegado desde hace tanto tiempo. Sabemos bien por la experiencia del pasado los inconvenientes que tienen, pero ignoramos la magnitud de los males que su cambio puede producir.

La consideración de las probabilidades, ampliada a la astronomía, puede servir para detectar la causa de las anomalías observadas en los movimientos celestes, así como para distinguir las pequeñas irregularidades involucradas en los errores de que son susceptibles las observaciones. Fue precisamente comparando sus observaciones unas con otras como Tycho Brahe se dio cuenta de la necesidad de aplicar a la luna una ecuación de tiempo distinta de la que se aplicaba al sol y a los planetas. Y fue también observando el resultado de numerosas observaciones como Mayer [18] detectó, para el caso de la luna, una disminución en el coeficiente de la desigualdad de la precesión, en comparación con los demás cuerpos celestes. Pero como esta disminución no parecía resultar de la gravitación universal, la mayoría de los astrónomos la pasaron por alto en sus cálculos. Habiendo sometido al cálculo de probabilidades un gran número de observaciones lunares elegidas con este fin y que Bouvard, por encargo mío, tuvo a bien calcular, esta disminución me pareció indicada con una probabilidad tan grande que me creí en la obligación de buscar su causa. Enseguida vi que no podía ser otra que la elipticidad de la esfera terrestre, dejada hasta entonces de lado en la teoría del movimiento lunar en la idea de que no producía en éste más que límites insignificantes; de aquí deduje que dichos límites se vuelven sensibles por las integraciones sucesivas de las ecuaciones diferenciales. Mediante un análisis concreto, determiné entonces tales límites y descubrí primero la irregularidad del movimiento lunar en latitud, que es proporcional al seno de la longitud de la luna y del que ningún astrónomo se había dado cuenta aún, y luego, por medio de esta irregularidad, me dí cuenta de que la teoría de la gravedad considera, en efecto, la disminución indicada por Mayer en la ecuación de la precesión aplicable a la luna. La magnitud de esta disminución y el coeficiente de la mencionada irregularidad en latitud son muy adecuadas para fijar el achatamiento de la tierra. Hice a Burg, que por entonces se dedicaba a perfeccionar las tablas de la luna mediante la comparación de todas las observaciones válidas, partícipe de mis investigaciones y le rogué que determinara con especial cuidado esas dos cantidades. Los valores que halló coinciden, con un elevado grado de concordancia, en asignar a la tierra un achatamiento de 1/305, el cual difiere muy poco del medio inferido de las medidas de los grados del meridiano y del péndulo, pero que, teniendo en cuenta la influencia de los errores de las observaciones y de las causas perturbadoras sobre estas medidas, me parece determinado con mayor exactitud por estas irregularidades lunares.

El cálculo de probabilidades me ha llevado igualmente a la causa de las grandes irregularidades de Júpiter y de Saturno. Comparando las observaciones modernas con las antiguas, Halley encontró una aceleración en el movimiento de Júpiter y una retardación en el de Saturno. Para conciliar dichas observaciones, sometió estos movimientos a dos ecuaciones seculares de signos contrarios y que se incrementaban como los cuadrados de los tiempos transcurridos desde 1700. Euler y Lagrange sometieron a análisis las alteraciones que debía producir en tales movimientos la atracción mutua de ambos planetas: hallaron ecuaciones seculares. Pero sus resultados eran tan distintos que por lo menos uno de ellos tenía que estar equivocado [19]. Me decidí entonces a reconsi-

[18] Tobías Mayer fue un astrónomo alemán que, en 1753, confeccionó unas tablas de los movimientos de las estrellas en las que Laplace se basó para sus cálculos.

[19] En efecto, mientras que Euler había llegado a establecer que las irregularidades en los movimientos medios de estos dos

derar. este importante problema de la mecánica celeste y establecí la invariabilidad de los movimientos medios planetarios, lo que hizo desaparecer las ecuaciones seculares introducidas por Halley en las tablas de Júpiter y de Saturno. Para explicar las grandes irregularidades de dichos planetas ya no quedaba, pues, otra cosa que las atracciones de los cometas, a las que efectivamente acudieron varios astrónomos, o la existencia de una desigualdad de largo período, producida en los movimientos de los dos planetas por su acción recíproca y afectada por signos contrarios para cada uno de ellos. El descubrimiento de un teorema sobre este tipo de irregularidades me hizo considerar muy verosímil esta irregularidad. Según este teorema, si el movimiento de Júpiter se acelera, el de Saturno se aminora, cosa que concuerda con lo que había señalado Halley, pero es que, además, la aceleración de Júpiter que resulta del mismo teorema está con la retardación de Saturno en una relación muy próxima a la de las ecuaciones seculares propuestas por Halley. Considerando los movimientos medios de Júpiter y de Saturno, no me resultó difícil darme cuenta de que el doble del de Júpiter no excede más que de forma insignificante al quíntuple del de Saturno. El período de una desigualdad que tuviera como argumento esa diferencia sería de aproximadamente nueve siglos. A decir verdad, su coeficiente sería del orden de los cubos de las excentricidades de las órbitas, pero yo sabía que, en virtud de las sucesivas integraciones, adquiere como divisor el cuadrado del pequeñísimo multiplicador del tiempo en el argumento de esta desigualdad, cosa que puede conferirle un valor alto; así pues, la existencia de dicha desigualdad me pareció muy probable. Esta probabilidad se vio incrementada aún por la observación siguiente. Al suponer nulo su argumento en la época de las observaciones de Tycho Brahe, vi que Halley no podía menos de

planetas eran más o menos iguales, Lagrange, que se ocupa de este tema en una memoria crucial, titulada «Sur les variations séculaires des mouvements moyens des planetes» (*Oeuvres de Lagrange, V,* 381-414) llega a resultados muy distintos.

hallar, a través de la comparación de las observaciones modernas con las antiguas, las alteraciones que había indicado, mientras que la comparación de las observaciones modernas entre sí debía mostrar alteraciones contrarias y parecidas a las que Lambert había inferido de dicha comparación. La existencia de esta desigualdad me pareció, pues, enormemente verosímil y no vacilé en emprender el largo y penoso cálculo necesario para estar seguro de ella. El resultado de dicho cálculo la confirmó enteramente pero, además, me llevó a conocer muchas otras irregularidades, cuyo conjunto ha llevado a las tablas de Júpiter y de Saturno a la precisión de las propias observaciones [20].

Fue también a través del cálculo de probabilidades como llegué a conocer la importante ley de los movimientos medios de los tres primeros satélites de Júpiter, según la cual la longitud media del primero menos tres veces la del segundo, más dos veces la del tercero, es exactamente igual a una semicircunferencia [21]. La aproximación con la que los movimientos medios de estos astros se ajustan a esta ley desde su descubrimiento indicaba su existencia con una gran verosimilitud; busqué, pues, su causa en la acción mutua de estos tres cuerpos. El análisis profundo de esta acción me hizo ver que ha sido suficiente que en un principio las relaciones de sus movimientos medios se hayan aproximado a esta ley den-

[20] Sus principales descubrimientos sobre la teoría planetaria los expone Laplace en cinco memorias, compuestas entre noviembre de 1785 y abril de 1788. Los cálculos realizados por Laplace en estos trabajos permitieron establecer unos resultados que empíricamente no hubieran podido ser establecidos aún en mucho tiempo. Esta es la razón por la que Laplace escribe (*Oeuvres Complètes,* IX, p. 56): «Sobre este punto, la teoría de la gravitación se ha movido muy por delante de la observación».

[21] Laplace se ocupa de este asunto, que ya había abordado Lagrange en una larga memoria (*Oeuvres de Lagrange,* VI, pp. 65-225), en un interesante trabajo en el que llega a demostrar que los movimientos medios de los satélites de Júpiter únicamente están sometidos a irregularidades periódicas, coincidiendo sus resultados con las observaciones hechas por el astrónomo sueco Pehr Wargentin.

tro de ciertos límites para que su acción mutua la haya establecido y la mantenga en vigencia.

De aquí se desprende lo necesario que es estar atento a las indicaciones de la naturaleza, cuando son resultado de un gran número de observaciones, aun cuando, por lo demás, resulten inexplicables con los medios que se conocen. La enorme dificultad de los problemas relativos al sistema del mundo hâ obligado a los geómetras a acudir a aproximaciones que siempre dejan la duda de que las cantidades dejadas de lado tengan una influencia apreciable. Cuando las observaciones les han llamado la atención sobre esta influencia, han vuelto sobre su análisis, y al rectificarlo, han hallado siempre la causa de las anomalías observadas, han determinado sus leyes y, muchas veces, se han adelantado a la observación descubriendo irregularidades todavía no indicadas por ella. Así pues, se puede decir que la propia naturaleza ha contribuido a la perfección de las teorías basadas en el principio de la gravitación universal, lo que, en mi opinión, constituye una de las pruebas más importantes de la verdad de este admirable principio [22].

Uno de los fenómenos más destacados del sistema del mundo es el de todos los movimientos de rotación y de revolución de los planetas y de los satélites, en el sentido de la rotación del sol y aproximadamente en su plano ecuatorial. Un fenómeno tan extraordinario no es ni mucho menos efecto del azar [23]: indica una causa general que ha determinado todos estos movimientos. Para

22 Laplace hace un elogio del principio de la gravitación universal al que considera «la ley más incontestable de toda la ciencia física» en su memoria *Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planètes.*

23 En una memoria en la que estudia la inclinación de las órbitas de los cometas, Laplace recuerda que ya Daniel Bernouilli había advertido que la uniformidad del sentido del movimiento de planetas y satélites no puede deberse a la casualidad. En efecto, los cálculos de D. Bernouilli, merecedores de un premio que hubo de compartir con su padre, Jean Bernouilli, se hallan recogidos en el *Recueil des pièces qui ont remporté le prix de l'Academie Royale des Sciences,* t. III (1734).

obtener la probabilidad con la que está indicada esta causa, observaremos que el sistema planetario, tal como nos es hoy conocido, está compuesto por once planetas y dieciocho satélites. Se han identificado los movimientos de rotación del sol, de seis planetas, de los satélites de Júpiter, del anillo de Saturno y de uno de sus satélites. Estos movimientos forman, junto con los de revolución, un conjunto de cuarenta y tres movimientos dirigidos en el mismo sentido; ahora bien, el análisis probabilístico revela que se puede apostar más de cuatro mil millares de millones contra uno a que esta disposición no es efecto del azar, lo que constituye una probabilidad muy superior a la de los acontecimientos históricos sobre los que no se admite ninguna duda. Debemos, pues, creer, al menos con la misma confianza, que una causa primitiva ha dirigido los movimientos planetarios, sobre todo si tenemos en cuenta que la inclinación de la mayoría de estos movimientos respecto al ecuador solar es muy pequeña.

Otro fenómeno igualmente notable del sistema solar es la escasa excentricidad de las órbitas de los planetas y de los satélites, en tanto que las de los de los cometas son muy alargadas, es decir, el de que las órbitas de este sistema no presenten gradaciones intermedias entre una excentricidad grande y una pequeña. También aquí nos vemos obligados a reconocer el efecto de una causa regular: el azar no hubiera conferido una forma casi circular a las órbitas de todos los planetas y de sus satélites; es, pues, necesario que la causa que ha determinado los movimientos de tales cuerpos los haya hecho casi circulares. Es también preciso que las grandes excentricidades de las órbitas de los cometas sean resultado de la existencia de esta causa, sin que ella haya influido en la dirección de su movimiento, pues vemos que hay casi tantos cometas retrógrados como directos y que la inclinación media de todas sus órbitas se aproxima mucho a medio ángulo recto, como sería el caso si tales cuerpos hubieran sido lanzados al azar.

Cualquiera que sea la naturaleza de la causa en cuestión, es preciso que haya abarcado a todos los planetas, dado que ha producido o dirigido sus movimientos y, habida cuenta de las distancias que los separan, no puede haber sido otra cosa que un fluido de gran extensión. Por otra parte, para haberles conferido un movimiento casi circular en torno al sol en el mismo sentido, ese fluido ha tenido que rodear a dicho astro como una atmósfera. La consideración de los movimientos planetarios nos induce, por tanto, a pensar que, debido a un inmenso calor, la atmósfera del sol se extendía en un principio más allá de las órbitas de los planetas y que luego se ha ido retirando hasta sus límites actuales [24].

En el estado primitivo en el que lo suponemos, el sol se parecía a las nebulosas que nos muestra el telescopio, compuestas de un núcleo más o menos brillante, rodeado de una nebulosidad que, al condensarse en la superficie del núcleo, algún día lo transformará en estrella. Si, por analogía, nos imaginamos todas las estrellas compuestas de este modo, podemos pensar que su anterior estado de nebulosidad se vio precedido a su vez por otros estados en los que la materia nebulosa era cada vez más difusa, siendo el núcleo cada vez menos luminoso. Llegamos así, remontándonos tan lejos como es posible, a una nebulosidad tan difusa que apenas podríamos suponer su existencia.

Tal es, en efecto, el primer estado de las nebulosas que Herschel observó con sumo cuidado por medio de sus potentes telescopios [25] y a través de las cuales ha

[24] Esta teoría, conocida con el nombre de «hipótesis de la nebulosa», fue formulada por Laplace en su *Exposition du systeme du monde,* llegando a alcanzar en el siglo XIX una gran popularidad, probablemente debido a que concordaba perfectamente con el espíritu evolucionista de la época.

[25] William Herschell fue un astrónomo y también un hábil constructor de telescopios con los que estudiaba el movimiento y la distribución de las estrellas en el espacio que, después de dividir el hemisferio celeste en cierto número de áreas, se dis-

seguido los progresos de la condensación, pero no en una sólo, pues en ellas tales progresos sólo podríamos percibirlos tras varios siglos, sino en el conjunto de ellas, de forma parecida a como en un extenso bosque se puede seguir el crecimiento de los árboles a través de los individuos de distintas edades que forman parte de él. El empezó por observar la materia nebulosa distribuida en diversas aglomeraciones por las distintas partes del cielo del que ocupa una gran extensión. En algunas de estas aglomeraciones vio esta materia levemente condensada en torno a uno o varios núcleos poco brillantes. En otras nebulosas, esos núcleos brillan más que la nebulosa que los rodea. Al producirse la separación de las atmósferas de cada núcleo mediante una condensación ulterior, aparecen múltiples nebulosas formadas por núcleos brillantes muy próximos unos a otros y rodeados todos de una atmósfera. Algunas veces, la materia nebulosa, al condensarse de un modo uniforme, ha producido las nebulosas llamadas *planetarias.* Por último, un grado mayor de condensación transforma todas estas nebulosas en estrellas. Las nebulosas, clasificadas según este punto de vista filosófico, indican con una gran verosimilitud su transformación futura en estrellas y las estrellas existentes, el estado anterior de nebulosidad. Las consideraciones que siguen vienen en apoyo de las pruebas extraídas de estas analogías.

Desde hace ya tiempo, la disposición concreta de algunas estrellas visibles a simple vista ha llamado la atención de los observadores con talante filosófico. Mitchel ha señalado ya lo poco probable que es que las estrellas de las Pléyades, por ejemplo, hayan sido encerradas en el estrecho espacio que las rodea sólo por obra del azar, y ha concluido que este grupo de estrellas, así como otros parecidos que el cielo nos presenta, no son

puso a estudiarlas con todo detalle en una serie de estudios, en el segundo de los cuales, además de anotar 269 pares de estrellas girando entre sí, descubrió el planeta Urano.

sino efectos de una causa primitiva o de una ley general de la naturaleza. Tales grupos son una consecuencia necesaria de la condensación de las nebulosas en diversos núcleos, pues es evidente que, al sentirse la materia nebulosa incesantemente atraída por ellos, acabarán formando un grupo de estrellas similar al de las Pléyades. De igual modo, la condensación de las nebulosas en dos núcleos da lugar a estrellas muy próximas que giran una en torno a la otra, similares a aquellas cuyos movimientos ha considerado ya Herschel. Tal es también el caso de la sexagésima primera de Cisne y su siguiente, en las que Bessel acaba de determinar movimientos propios tan considerables y tan poco distintos que la proximidad de tales astros entre sí y su movimiento en torno a un centro común de gravedad no dejan lugar a dudas. De este modo, los progresos de la condensación de la materia nebulosa nos llevan a la consideración del sol, en otro tiempo rodeado de una amplia atmósfera, consideración a la que, como hemos visto, también se llega analizando los fenómenos del sistema solar. Una coincidencia tan notable confiere a la existencia de este estado anterior del sol una probabilidad rayana en la certeza.

Pero, ¿cómo ha determinado la atmósfera solar los movimientos de rotación y de revolución de planetas y satélites? Si estos cuerpos hubieran penetrado profundamente en dicha atmósfera, su resistencia les habría hecho caer sobre el sol; esto nos lleva a creer con gran verosimilitud que los planetas se han formado en los límites sucesivos de la atmósfera solar, la cual, al contraerse por enfriamiento, debió abandonar en el plano de su ecuador zonas de vapores que la atracción mutua de sus moléculas ha transformado en esferoides diversos.

En mi *Exposición del Sistema del mundo*[26] he desarrollado extensamente esta hipótesis, que me parece que da cuenta de todos los fenómenos que dicho sistema nos presenta.

[26] En el programa del curso que Laplace impartió en L'École Normale en 1795 estaban incluidas también algunas lecciones sobre el cálculo diferencial, así como sobre mecánica y astronomía, pero como el tiempo no le permitió desarrollarlas, Laplace remitió a sus oyentes a una obra que estaba escribiendo y que se había de titular *Description du systeme du monde*. En 1796, cumpliendo lo prometido, publica, en efecto, su *Exposition du systeme du monde,* considerada por algunos como la mejor obra de Laplace.

En tal hipótesis, los cometas son ajenos al sistema planetario. Si se relaciona su formación con la de las nebulosas, se los puede ver como pequeñas nebulosas con núcleos, errantes de un sistema solar a otro, que se han formado por la condensación de la materia nebulosa tan profusamente extendida por el universo. Los cometas serían así en relación a nuestro sistema lo que los aerolitos respecto a la tierra, a la que parecen ajenos. Cuando estos astros se vuelven perceptibles, presentan un parecido tan completo con las nebulosas que a menudo se los confunde con ellas, de las que sólo se los llega a distinguir por su movimiento o por el conocimiento de todas las nebulosas que quedan dentro de la parte de cielo en la que aparecen. Esta suposición explica de forma satisfactoria la enorme extensión que alcanzan las cabezas y las colas de los cometas, a medida que se aproximan al sol, y el enorme enrarecimiento de sus colas que, a pesar de su grosor, no afectan de forma apreciable el brillo de las estrellas que se ven a través de ellas.

Cuando pequeñas nebulosas entran en la zona del espacio en la que la atracción del sol resulta predominante y a la que denominaremos *esfera de actividad* de dicho astro, éste les obliga a describir órbitas elípticas o hiperbólicas. Pero, al ser su velocidad igual de posible en todas las direcciones, han de moverse indistintamente en todos los sentidos y bajo todas las inclinaciones respecto de la eclíptica, lo cual concuerda con lo que se observa.

También de la hipótesis anterior se desprende la gran excentricidad de las órbitas de los cometas. En efecto, si estas órbitas son elípticas, son muy alargadas, da-

do que sus ejes mayores son por lo menos iguales al radio de la esfera de actividad del sol. Pero pueden ser hiperbólicas y, si los ejes de tales hipérbolas no son demasiado grandes respecto a la distancia media del sol a la tierra, el movimiento de los cometas que las describen parecerá claramente hiperbólico. Sin embargo, de cien cometas cuyos elementos ya se poseen, ninguno ha parecido moverse sobre una hipérbola, por lo que es preciso que las probabilidades que dan una hipérbola clara sean extremadamente raras por comparación a las contrarias.

Los cometas son tan pequeños que, para hacerse visibles, su distancia perihélica ha de ser poco considerable. Hasta el presente esta distancia sólo ha superado el diámetro de la órbita terrestre dos veces, y generalmente ha estado por debajo del radio de dicha órbita. La idea es que, para aproximarse tanto al sol, su velocidad en el momento de entrar en la esfera de actividad de éste debe tener una magnitud y una dirección comprendidas dentro de unos límites estrechos. Calculando mediante el análisis de probabilidades la relación existente entre las probabilidades que, en esos límites, dan una hipérbola clara y las que dan una órbita que puede confundirse con una parábola, he averiguado que se puede apostar por lo menos seis mil contra uno a que una nebulosa que penetre en la esfera de actividad del sol de forma que permita ser observada describirá, o bien una elipse muy alargada, o bien una hipérbola que, por el tamaño de su eje, se confundirá fácilmente con una parábola en su parte observable; no es extraño, por tanto, que hasta ahora no se hayan identificado movimientos hiperbólicos.

La atracción de los planetas y tal vez también la resistencia de los medios etéreos ha debido transformar muchas órbitas de cometas en elipses cuyo eje mayor es menor que el radio de la esfera de actividad del sol, lo que aumenta las probabilidades de las órbitas elípticas. Es sumamente creíble que una transformación así ha tenido lugar en relación con el cometa de 1682,

hasta ahora el único cuya revolución ha sido determinada.

De los medios que es preciso elegir entre los resultados de un gran número de observaciones.

La búsqueda de estos medios es muy importante en la filosofía natural; y el análisis que exige, el más delicado y espinoso de toda la teoría de las probabilidades. Las observaciones y experiencias más precisas están siempre sometidas a errores que influyen en el valor de los elementos que de ellas se quieren deducir. Para hacer desaparecer tanto como sea posible tales errores por el procedimiento de destruir unos con otros, se multiplican las observaciones, pues el resultado medio de las mismas es tanto más exacto cuanto más grande su número. Pero, ¿cuál es la forma más ventajosa de lograr este resultado medio? ¿De qué error es susceptible todavía este resultado? Esto es lo que sólo el análisis de las probabilidades puede permitir conocer, y he aquí lo que nos enseña.

Para fijar las ideas, supongamos que tratamos de determinar, por medio de la observación, el tamaño aparente de un disco visto desde una determinada distancia. Si se han tomado un gran número de medidas del disco con instrumentos similares y a una misma distancia de él, obtendremos su tamaño medio aparente dividiendo la suma de todas las medidas parciales por el número de dichas medidas. Para obtener el error medio a esperar por exceso o por defecto sobre este resultado, observaremos que este error es la suma de los productos de cada error posible por su probabilidad, pues el error medio debe evaluarse como la pérdida media en un juego, ya que un error, sea positivo o negativo, ha de ser considerado como dicha pérdida. Determinando por medio del análisis de las funciones generatrices la expresión de tal error, nos encontramos con que tiene como factor una cantidad que depende de la

ley de probabilidad de los errores de cada medida. Esta ley nos es desconocida. No obstante, parece natural admitir que los errores negativos son tan probables como los positivos, con lo que parece que es imposible evaluar este error medio. Pero, determinado con ayuda del mismo análisis, la suma de los cuadrados de los errores de las observaciones, he visto que tiene el mismo factor. De este hecho he inferido la regla siguiente [27]:

Si se toman las diferencias entre el resultado medio de todas las medidas y cada una de ellas, el error medio que sobre este resultado cabe esperar en más o en menos es una fracción cuyo numerador es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de tales diferencias y el denominador, el producto del número de medidas por la raíz cuadrada de la relación de la circunferencia con el radio.

Tenemos así el resultado medio más ventajoso, cuya exactitud puede ser apreciada. Para luego trasladar este resultado a la distancia dada, basta con multiplicarlo por la relación inversa entre esta distancia y aquella desde la que se han tomado las medidas.

Supongamos ahora que estas medidas se han tomado desde distancias distintas y que se sigue queriendo deducir de ellas el tamaño aparente del disco visto desde una determinada distancia. Es evidente que el error de cada una de estas observaciones tendrá una incidencia tanto menor cuanto más cerca del disco haya sido hecha aquélla, por lo que no es difícil ver que cada medida observada, menos su error, ha de ser igual al tamaño buscado, multiplicado por la relación entre la distancia dada y aquella otra desde la que se ha tomado la medida. Considerando como una incógnita el tamaño buscado, cada medida observada proporcionará una ecuación de primer grado, cuyo primer miembro será el producto de la incógnita por dicha relación, mientras que el segundo será la medida observada menos su error. Si se suman todas estas ecuaciones, su conjunto formará una ecuación final que, suponiendo nula la suma de los errores de todas las observaciones, dará para la incógnita un valor al que todas las observaciones habrán concurrido, y que por esta razón ha de tener una gran precisión. Esta es la regla que se sigue normalmente, pero no logra el resultado más ventajoso, que es aquel en el que lo único que hay que temer es el error medio más pequeño. Para obtener este resultado, es preciso observar que todas las formas posibles de combinar las ecuaciones anteriores a fin de obtener una ecuación final de primer grado que determine la incógnita equivalen a multiplicar cada una de ellas por un factor y a sumarlas después sin tener en cuenta los errores de las observaciones. Tomando, pues, por tales factores constantes arbitrarias y buscando la expresión analítica del error medio del resultado dado por la ecuación final, es preciso determinar estas constantes de tal suerte que el error sea un *mínimum*. Se halla entonces que cada constante es igual al coeficiente de la incógnita en la ecuación parcial que multiplica; el valor de la incógnita arrojado por la ecuación final se expresa así mediante una fracción que tiene por numerador la suma de los productos del coeficiente de la incógnita en cada ecuación parcial por la medida observada correspondiente, y por denominador, la suma de los cuadrados de todos estos coeficientes. Si a continuación se toman las diferencias entre las medidas observadas y los productos sucesivos de este resultado por los coeficientes de la incógnita en

[27] A finales del siglo XVIII se descubrió que no sólo los observadores, sino también los instrumentos, tenían sus propios errores y se comenzaron a idear técnicas y procedimientos tendentes a corregir estos errores de observación y medición. De todos ellos, el más importante fue el llamado de los «mínimos cuadrados», desarrollado principalmente por Gauss, cuyas investigaciones son del año 1794, aun cuando no las publica hasta 1809, y por Legendre, que lo introduce en un trabajo publicado con anterioridad a esta fecha. Laplace, en su *Théorie Analytique* (*O. c.*, VII, p. 353), cita como creadores de este método a D. Bernouilli y su teoría de los errores, a Euler y a Gauss, pero no a Legendre, reivindicando para sí únicamente la generalidad que podía asumir en virtud de la derivación que él había logrado establecer de él a partir del cálculo de probabilidades.

las ecuaciones parciales, el error medio que todavía cabe esperar será la raíz cuadrada de una fracción cuyo numerador es la suma de los cuadrados de estas diferencias, siendo el denominador el producto de estas tres cantidades, a saber, el número de las observaciones, la suma de los cuadrados de los coeficientes de la incógnita en las ecuaciones parciales y la circunferencia que tiene por radio la unidad.

No es difícil ver que, si se eleva al cuadrado la expresión del error de cada medida, extraída de la ecuación parcial correspondiente, y a continuación se convierte en un *minimum* la suma de estos cuadrados, haciendo variar en ellos la incógnita, la ecuación del *minimum* dará para esta incógnita el valor precedente.

En un gran número de casos, y en especial en astronomía, los elementos que se quieren determinar son más o menos conocidos y no requieren más que ligeras modificaciones que tratan de obtenerse mediante numerosas y precisas observaciones. Para ello, se considera cada observación como una función de los elementos. Sustituyendo en ella el valor aproximado de cada elemento, más su corrección considerada como una incógnita, desarrollando luego la función en una serie ordenada por respecto a las potencias y a los productos de tales incógnitas, dejando a un lado, dada su insignificancia, los cuadrados de tales productos y, por último, igualando la serie a la observación menos su error, se forma una ecuación de primer grado entre estas incógnitas. Esto es lo que se denomina *ecuación de condición*. Después se combinan estas ecuaciones de condición de suerte que queden reducidas a un número de ecuaciones finales igual al de incógnitas. La resolución de estas ecuaciones nos da los valores de dichas incógnitas, o las correcciones de los distintos elementos.

El modo más general de llegar a estas ecuaciones finales consiste en multiplicar cada una de las ecuaciones de condición por un factor indeterminado. La suma de estos productos, suponiendo nulo todo lo que es relativo a los errores de las observaciones, nos dará una primera

ecuación final. Un segundo sistema de factores nos dará una segunda ecuación final, y así sucesivamente. El análisis de las funciones generatrices nos da la expresión del error medio que cabe esperar sobre la corrección de cada elemento, obtenida mediante la resolución de estas ecuaciones finales. Si se fijan los factores mediante la condición de que cada una de estas expresiones sea un *minimum,* nos encontramos con que el primer sistema de factores se compone de los coeficientes de la primera incógnita, en cada ecuación de condición, el segundo, de los de la segunda, etc., de donde se deduce fácilmente que las correcciones más ventajosas de los elementos, en general, son, como ocurre en el caso de una sola variable, aquellas que se obtienen cuando se convierte en un *minimum* la suma de los cuadrados de los errores de cada observación, haciendo variar de forma sucesiva las correcciones desconocidas. En este caso general, el análisis nos da la expresión del error medio que cabe esperar aún sobre cada elemento; pero, aunque sea muy sencilla, sin embargo, esta expresión no puede comprenderse sin el auxilio del álgebra.

Hemos supuesto que el número de observaciones era muy grande, y la regla anterior es tanto más exacta cuanto mayor dicho número. Pero, incluso en el caso de que este número sea pequeño, parece que lo natural es emplear esta misma regla que en todos los casos proporciona un medio simple de obtener sin titubeos las correcciones que se quieren determinar.

Esta regla puede servir también para comparar la precisión de diversas tablas astronómicas de un mismo astro. Estas tablas siempre pueden suponerse reducidas a la misma forma, y entonces sólo difieren en las épocas, los movimientos medios y los coeficientes de los argumentos, pues es evidente que si una de ellas contiene un argumento que no figura en las demás estò equivale a suponer nulo en ellas el coeficiente de dicho argumento. Si, con el fin de rectificar estas tablas, se las comparara ahora con la totalidad de las buenas observaciones, se vería por lo que antecede que satisfacen la

condición de que la suma de los cuadrados de los errores que todavía permiten sea un *mínimum;* por tanto, merecen preferencia aquellas tablas que, comparadas con un número considerable de observaciones, más se aproximen a esta condición.

De las tablas de mortalidad, de la duración media de la vida, de los matrimonios y de asociaciones cualesquiera.

La manera de componer las tablas de mortalidad es muy sencilla. Se toman en el el registro de nacimientos y defunciones un gran número de niños a los que se sigue a lo largo de toda su vida, determinando cuántos quedan de su edad al final de cada año y escribiendo dicho número al lado del año que termina. Pero, como en los dos primeros años de vida la mortalidad es muy grande, para mayor exactitud, en esta primera edad, conviene indicar el número de supervivientes al final de cada semestre.

Si se divide la suma de los años de vida de todos los individuos inscritos en una tabla de mortalidad por el número de tales individuos, y si de este cociente se resta un semestre, se obtendrá la duración media de la vida, que vemos que es de veintiocho años y medio, aproximadamente. Esta sustracción sólo debe tener lugar en caso de que la tabla no indique el número de vivos al final del primer semestre; el motivo es que, al poder suponer uniformemente repartida la mortalidad por todo el primer año, la parte de la duración media de la vida correspondiente a este año no es más que la mitad de la que hubiera tenido lugar si la muerte afectara a los individuos sólo al final del año. La duración media de lo que aún resta por vivir, cuando se ha llegado a una edad cualquiera, se determina sumando los años que han vivido por encima de esta edad todos los individuos que la han alcanzado, dividiendo luego ésta por el número de tales individuos y restando un semestre

de dicho cociente. No es en el momento del nacimiento cuando la duración media de la vida es mayor, sino cuando se ha escapado a los peligros de la primera infancia; entonces es de unos cuarenta y tres años. La probalidad de llegar a una edad cualquiera partiendo de una edad dada es igual a la relación de los dos números de individuos indicados en la tabla para esas dos edades.

La precisión de estos resultados exige el empleo en la construcción de las tablas de un número muy grande de nacimientos. El análisis proporciona entonces sencillas fórmulas para apreciar la probabilidad de que los números indicados en dichas tablas no van a apartarse de la verdad más allá de ciertos límites. Por estas fórmulas se ve que, a medida que se consideran más nacimientos, el intervalo de los límites disminuye, en tanto que la probabilidad aumenta, de suerte que las tablas llegarían a representar exactamente la verdadera ley de la mortalidad, si el número de nacimientos empleados fuera infinito.

Una tabla de mortalidad es, pues, una tabla de las probabilidades de la vida humana. La relación entre el número de individuos escritos al lado de cada año y el número de nacimientos es la probabilidad de que un recién nacido cumpla dicho año. Igual que se estima el valor de la esperanza sumando los productos de cada bien esperado por la probabilidad de obtenerlo, se puede también evaluar la duración media de la vida incrementando los productos de cada año con la probabilidad de llegar a él. De este modo, formando una serie de fracciones, cuyo denominador común sea el número de los recién nacidos de la tabla y cuyos numeradores sean los números escritos al lado de cada año, y sumándolas después, se obtendrá la duración media de la vida, una vez restado, para mayor exactitud, un semestre, por un procedimiento absolutamente idéntico, pues, al que acabamos de dar. Pero esta forma de apreciar la duración media de la vida tiene la ventaja de permitir ver que, en una población estacionaria, es decir, tal que el

número de nacimientos iguale al de muertes, la duración media de la vida es la relación misma existente entre la población y los nacimientos anuales, pues, al ser estacionaria la población, el número de individuos de una edad comprendida entre dos años consecutivos de la tabla es igual al número de nacimientos anuales multiplicado por la semisuma de las probabilidades de alcanzar esos años, siendo, por tanto, la suma de todos estos productos la población entera. No es difícil ver ahora que esta suma, dividida por el número de nacimientos anuales, coincide con la duración media de la vida tal como la acabamos de definir.

Mediante una tabla de mortalidad no es difícil construir la tabla correspondiente de la población, que se supone estacionaria. Para ello se toman las medias aritméticas de los números de la tabla de mortalidad correspondientes a las edades cero y un año, uno y dos años, dos y tres años, etc. La suma de todas estas medias es la población entera; se la escribe al lado de la edad cero. De esta suma se resta la primera media, y lo que queda es el número de individuos de uno y más años; se lo escribe al lado del año 1. De este primer resto se resta la segunda media, siendo este segundo resto el número de individuos de dos años y más; se lo escribe al lado del año 2, y así sucesivamente [28].

Son tantas las causas diversas que influyen en la mortalidad que las tablas que la representan han de variar con el lugar y el tiempo. Los diversos estados de la vida presentan en este sentido diferencias apreciables relativas a las fatigas y riesgos propios de cada estado, que es preciso tener en cuenta en los cálculos basados en la duración de la vida. Pero tales diferencias no han sido todavía suficientemente observadas. Algún día lo serán,

28 Los estudios estadísticos de la población iban a adquirir mucha importancia en la década de 1820 a 1830, en la que Fourier publica sus investigaciones estadísticas sobre la ciudad de París y sobre todo Quételet hace del método de Fourier un instrumento de trabajo aplicable a toda clase de datos de índole social.

y ese día sabremos qué grado de sacrificio vital exige cada profesión y aprovecharemos estos conocimientos para reducir los riesgos de las mismas.

La mayor o menor salubridad del suelo, su temperatura, las costumbres de los habitantes y las obras de los gobiernos tienen una gran influencia sobre la mortalidad. Pero la investigación de la causa de las diferencias observadas ha de ir siempre precedida por la de la probabilidad con la que dicha causa se halla indicada. Así, la relación entre la población y los nacimientos anuales, que en Francia hemos visto ascender a veintiocho y un tercio, no llega a veinticinco en el antiguo ducado de Milán. Estas relaciones, establecidas en ambos casos sobre un gran número de nacimientos, no permiten poner en duda la existencia de una causa especial de mortalidad en el Milanesado, que interesa al gobierno de este país investigar y hacer desaparecer.

La relación entre la población y los nacimientos aumentaría aún si se llegaran a reducir o a extinguir algunas enfermedades peligrosas que están muy extendidas. Esto es lo que, afortunadamente, se ha hecho con la viruela, en primer lugar, mediante la inoculación de esta enfermedad, y luego, de manera mucho más ventajosa, mediante la inoculación de la vacuna, descubrimiento inapreciable de Jenner que con él se ha convertido en uno de los mayores benefactores de la humanidad.

La viruela tiene algo de particular y es que no ataca dos veces al mismo individuo o que al menos este caso es tan raro que se puede pasar por alto en el cálculo. Esta enfermedad, de la que poca gente se libraba antes del descubrimiento de la vacuna, es generalmente mortal y ocasiona la muerte a un séptimo de los atacados por ella. A veces es benigna y la experiencia ha mostrado que se le puede otorgar este carácter inoculándola en personas sanas, preparadas por un buen régimen, y en una estación favorable. En este caso la relación entre los individuos a los que causa la muerte y los inoculados no llega a un tricentésimo. Esta gran ventaja de la inoculación, unida a las de no alterar la belleza y preservar

de las molestas secuelas que la viruela suele entrañar consigo, ha hecho que la adopten numerosas personas. Su práctica fue fervientemente recomendada, pero, como sucede casi siempre con las cosas que tienen inconvenientes, también fue vivamente combatida. En medio de esta disputa, Daniel Bernoulli se propuso someter al cálculo de probabilidades la influencia de la inoculación sobre la duración media de la vida [29]. No contando con datos precisos acerca de la mortalidad producida por la viruela en las distintas edades, partió del supuesto de que el riesgo de verse atacado por ella y el de llegar a perecer son los mismos a cualquier edad. A partir de estas suposiciones y mediante un análisis minucioso llegó a convertir una tabla normal de mortalidad en la que tendría lugar si la viruela no existiera, y llegó a la conclusión de que la extinción de esta enfermedad incrementaría en unos tres años la duración media de la vida, lo que le pareció poner fuera de duda la ventaja de la inoculación. D'Alembert criticó este análisis de Bernoulli objetando primero la incertidumbre de sus dos hipótesis y luego su insuficiencia por no considerar la comparación entre el riesgo cercano, aunque muy pequeño, de perecer por causa de la inoculación y el mucho mayor, pero más lejano, de sucumbir a la viruela natural. Esta consideración le es indiferente a los gobiernos, debido a que desaparece cuando se considera un número grande de individuos y no impide que para ellos subsistan las ventajas de la inoculación, pero tiene mucho peso para un padre de familia, el cual, al hacer inocular a sus hijos, no podrá menos de temer ver perecer pronto lo que más quiere en el mundo y ser él el causante. A muchos padres les retenía este temor que felizmente ha disipado

[29] D. Bernouilli se ocupa de este tema en su memoria *Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir,* que, antes de ser publicada por la Academia de París, fue duramente criticada por D'Alembert, que no estaba de acuerdo con las ventajas calculadas por D. Bernouilli.

el descubrimiento de la vacuna. Por uno de esos impenetrables misterios de la naturaleza, la vacuna es un preservativo contra la viruela tan seguro como el virus variólico y no encierra ningún peligro: no expone a ninguna enfermedad y no requiere grandes cuidados. Además, su práctica se ha extendido con toda rapidez, no quedando, para hacerla universal, otra cosa por vencer que la inercia natural de la gente, contra la que es preciso luchar incesantemente, aun cuando se trate de sus más caros intereses.

La forma más simple de calcular las ventajas que produciría la extinción de una enfermedad consiste en determinar mediante la observación el número de individuos de una determinada edad a los que causa la muerte cada año y restarlo del número de muertos de la misma edad. La relación entre la diferencia y el número total de individuos de la edad en cuestión constituiría la probabilidad de perecer a esa edad si no existiera la enfermedad. Sumando, pues, estas probabilidades desde el nacimiento hasta una edad cualquiera y restando esta suma de la unidad, obtendremos la probabilidad de vivir hasta esa edad, correspondiente a la extinción de la enfermedad. La serie de estas probabilidades será la tabla de mortalidad relativa a tal hipótesis y de ella se podrá deducir, de acuerdo con lo antedicho, la duración media de la vida. Así es como Duvilard ha descubierto que el incremento de la duración media de la vida por causa de la inoculación de la vacuna es por lo menos de tres años. Un incremento tan considerable produciría un crecimiento muy grande de la población, si ésta no estuviera, por otro lado, restringida por la correspondiente disminución de las subsistencias.

Es principalmente por la falta de subsistencias por lo que la marcha progresiva de la población está detenida. En todas las especies animales y vegetales, la naturaleza tiende incesantemente a incrementar el número de individuos hasta que éstos llegan al nivel de los medios de subsistencia. En la especie humana, las causas morales

tienen una gran influencia sobre la población[30]. Si, mediante fáciles roturaciones, el suelo es capaz de suministrar a las nuevas generaciones una alimentación abundante, la seguridad de poder sustentar una familia numerosa fomenta los matrimonios y los hace más precoces y fecundos. En un suelo así, la población y los medios de subsistencia deben crecer paralelamente en progresión geométrica. Pero cuando las roturaciones se hacen más raras y difíciles, entonces el crecimiento de la población disminuye, aproximándose continuamente al estado variable de las subsistencias, en torno al cual oscila, de forma parecida al modo en que un péndulo, cuyo punto de suspensión se mueve con un movimiento retardado, oscila en torno a ese punto debido a su peso. Es difícil calcular el máximo de crecimiento de la población; según algunas observaciones, parece que, en circunstancias favorables, la población de la especie humana podría duplicarse cada quince años. Se calcula que en la América septentrional, este período es de veinticinco años. En este estado de cosas, la población, los nacimientos, los matrimonios, la mortalidad, crecen todos ellos siguiendo la misma progresión geométrica, pudiéndose obtener la relación constante de los términos consecutivos mediante la observación de los nacimientos anuales en dos épocas distintas.

[30] T. H. Malthus había publicado en 1798 la primera versión de su *Essay on the principle of population,* panfleto en el que exponía su conocida tesis de que la población, si no se la frena, aumenta en progresión geométrica, en tanto que la oferta de alimentos sólo lo hace en progresión aritmética, tendiendo por tanto aquella a crecer hasta alcanzar lo que él llama «el límite de los medios de subsistencia». Naturalmente, Malthus era consciente de la existencia de frenos, tanto positivos (guerra, peste, hambre, etc.) como preventivos (el control de la natalidad, por ejemplo), que impiden el crecimiento de la población hasta esos extremos, pero no vio que su argumento negaba la posibilidad de un aumento del nivel de vida hasta que empezaron a llover las críticas a su toría. Para salir al paso de éstas, introdujo en la segunda versión del *Essay,* ciertas modificaciones, reconociendo la existencia de un nuevo freno preventivo, «la restricción moral», entendiendo por tal el retraso en la celebración del matrimonio acompañado de una estricta continencia sexual antes del mismo. Laplace se está haciendo eco aquí de estas teorías, tan populares en aquel momento.

Como una tabla de mortalidad representa las probabilidades de vida humana, por medio de ella se puede determinar la duración de los matrimonios. Supongamos, para simplificar, que la mortalidad es la misma para los dos sexos; la probabilidad de que el matrimonio subsista un año, dos, tres, etc., la obtendremos formando una serie de fracciones cuyo denominador común sea el producto de los dos números de la tabla correspondientes a las edades de los cónyuges y cuyos numeradores sean los productos sucesivos de los números correspondientes a esas edades, aumentados en un año, dos, tres, etcétera. La suma de estas fracciones, aumentada en un medio, será la duración media del matrimonio, tomando el año como unidad. La misma regla puede extenderse sin dificultad a la duración media de cualquier asociación formada por tres o más individuos.

De los beneficios que dependen de la probabilidad de los acontecimientos.

Recordemos aquí lo que hemos dicho al hablar de la esperanza. Hemos visto que para obtener la ventaja que resulta de varios acontecimientos simples, de los cuales unos producen ganancias y otros pérdida, es preciso sumar los productos de la probabilidad de cada acontecimiento favorable por el beneficio que proporciona y restar de esta suma la de los productos de la probabilidad de cada acontecimiento desfavorable por la pérdida que ocasiona. Pero, cualquiera que sea la ventaja expresada por la diferencia de esas sumas, un solo acontecimiento compuesto de tales acontecimientos simples, no nos protege contra el temor de sufrir una pérdida real. Se cree que este temor ha de disminuir cuando se multiplica el acontecimiento compuesto. El cálculo de probabilidades lleva a este teorema general.

Con la repetición de un acontecimiento ventajoso, simple o compuesto, el beneficio real se va haciendo cada

vez más probable y aumenta continuamente. En la hipótesis de un número infinito de repeticiones alcanza la certeza, y si se lo divide por su número, el cociente o beneficio medio de cada acontecimiento constituye la esperanza matemática misma, o la ventaja relativa al acontecimiento. Y lo mismo ocurre con la pérdida que, por poco desventajoso que sea el acontecimiento, a la larga se convierte en segura.

Este teorema sobre los beneficios y las pérdidas es análogo a los que antes hemos dado acerca de las relaciones que indica la repetición indefinida de acontecimientos simples o compuestos y, como ellos, prueba que la regularidad acaba por establecerse hasta en las cosas más subordinadas a eso que llamamos *azar*.

Cuando los acontecimientos son muy numerosos, el análisis sigue ofreciendo una expresión muy simple de la probabilidad de que el beneficio real esté comprendido dentro de ciertos límites, expresión que cae dentro de la ley general de la probabilidad que hemos dado más arriba, al hablar de las probabilidades que resultan de la multiplicación indefinida de los acontecimientos.

De la verdad del teorema anterior depende la estabilidad de las empresas fundadas en las probabilidades. Pero, para que pueda serles aplicado, es preciso que tales empresas multipliquen los acontecimientos ventajosos por medio de numerosos negocios.

Sobre las probabilidades de la vida humana se han fundado diversas instituciones tales como las rentas vitalicias y las tontinas. El método más general y más simple de calcular los beneficios y las cargas de tales instituciones consiste en reducirlos a capitales actuales por medio de este principio [31].

[31] Aunque E. Halley, De Moivre y D. Bernouilli hicieron importantes contribuciones en el campo de la demografía y de los estudios de seguros, el verdadero fundador de la ciencia actuarial fue J. Graunt, quien, estimulado por la información contenida en las listas de mortalidad preparadas con motivo de la peste que asoló Inglaterra en 1665, fue el primero en tratar el material demográfico de una forma estadística moderna.

El capital actual equivalente a la suma que es probable que no sea pagada hasta después de un cierto número de años es igual a dicha suma, multiplicada por la probabilidad de que sea pagada en tal momento y dividida por la unidad incrementada en la tasa del interés, elevada a una potencia igual al número de años, llamándose *tasa del interés* al interés anual de la unidad.

Este principio es fácil de aplicar a las rentas vitalicias sobre una o varias cabezas y a las cajas de ahorro y de seguros de cualquier clase. Supongamos que nos proponemos elaborar una tabla de rentas vitalicias conforme a una determinada tabla de mortalidad. Una renta vitalicia pagadera, por ejemplo, al cabo de cinco años y reducida a capital actual es, por este principio, igual al producto de las dos cantidades siguientes, a saber: la renta dividida por la quinta potencia de la unidad incrementada en la tasa del interés y la probabilidad de pagarla. Esta probabilidad es la razón inversa entre el número de individuos inscritos en la tabla frente a la edad del que constituye la renta y el número inscrito frente a tal edad incrementada en cinco años. Formando, pues, una serie de fracciones cuyos denominadores sean los productos del número de personas indicadas en la tabla de mortalidad como personas que están vivas a la edad del que constituye la renta por las potencias sucesivas de la unidad incrementada en la tasa del interés y cuyos numeradores sean los productos de la renta por el número de personas vivas a la misma edad incrementada sucesivamente en un año, dos años, etc., tenemos que la suma de tales fracciones será el capital requerido para la renta vitalicia a esa edad.

Supongamos ahora que una persona quiere asegurar a sus herederos, mediante una renta vitalicia, un capital pagadero a finales del año de su muerte. Para determinar el valor de esta renta se puede imaginar que la persona toma como préstamo vitalicio este capital dividido por la unidad incrementada en la tasa del interés y que lo coloca en la misma caja a interés perpetuo. Es evidente que la caja deberá ese capital a sus herederos al

finalizar el año de su muerte, pero lo único que habrá pagado cada año es el exceso del interés vitalicio sobre el perpetuo. Por tanto, la tabla de rentas vitalicias permite conocer lo que la persona ha de pagar anualmente a la caja para asegurar ese capital después de su muerte.

Los seguros marítimos, los seguros contra incendios y siniestros y, en general, todas las empresas de este tipo pueden calcularse mediante los mismos principios. Un negociante tiene barcos en el mar y quiere asegurar su valor así como el de su cargamento contra los peligros que puedan correr. Para ello, da una suma a una compañía que le responde del valor estimado de sus barcos y cargas. La relación entre este valor y la suma que ha de pagarse como precio del seguro depende de los peligros a que los barcos estén expuestos y sólo puede calcularse mediante numerosas observaciones acerca de la suerte corrida por los barcos que han salido del puerto con idéntico destino.

Si el asegurador no pagara a la compañía de seguros más que la suma indicada por el cálculo de probabilidades, dicha compañía no podría hacer frente a los gastos de su empresa; hace falta, pues, que pague una suma más alta, el precio de su seguro. Pero, entonces, ¿cuál es su ventaja? Es en este punto donde la consideración de la esperanza moral se impone. Es perfectamente concebible que si, como antes hemos visto, el juego más equilibrado se convierte en desventajoso al cambiar una apuesta segura por un beneficio incierto, el seguro mediante el que se cambia lo incierto por lo seguro tiene que ser ventajoso. Esto es, efectivamente, lo que se deduce de la regla que más arriba hemos expuesto para determinar la esperanza moral, regla mediante la cual puede verse además hasta dónde puede llegar el sacrificio que se debe hacer a la compañía de seguros sin dejar de conservar una ventaja moral. Dicha compañía, al procurar esta ventaja puede, por tanto, obtener a su vez un gran beneficio, si el número de asegurados es elevado, condición también necesaria para que su existencia sea duradera. En este caso, su beneficio resulta indudable

y sus esperanzas matemática y moral coinciden. El análisis conduce, en efecto, al siguiente teorema general, a saber, que si las expectativas son muy numerosas, las dos esperanzas se acercan constantemente una a la otra, terminando por coincidir en el caso de que el número de expectativas sea infinito.

Entre las instituciones fundadas sobre las probabilidades de la vida humana, las más útiles son aquellas en las que, a cambio de un pequeño sacrificio de la propia renta, uno asegura la existencia de la propia familia durante un tiempo en el que hay motivos para temer no poder ser capaz ya de satisfacer sus necesidades. Cuanto más inmoral es el juego tanto más favorables para las costumbres son estas instituciones, al favorecer las más nobles inclinaciones naturales. El gobierno debe, por tanto, fomentarlas y respetarlas en todas sus vicisitudes, pues al referirse las esperanzas que presentan a un futuro lejano, no pueden prosperar más que al abrigo de toda inquietud sobre su duración.

De las elecciones y de las decisiones de las asambleas [32]

La probabilidad de las decisiones de una asamblea depende de la pluralidad de votos, de la cultura y de la imparcialidad de los miembros que la componen. Son tantas las pasiones e intereses particulares que a menudo mezclan en ella su influencia que es imposible someter al cálculo esta probabilidad. Hay, no obstante, algunos resultados generales dictados por el simple buen sentido y que el cálculo confirma. Por ejemplo, si la asamblea no está bien informada sobre la cuestión sometida a su decisión, si dicha cuestión exige consideraciones delica-

32 El verdadero introductor de este tema es Condorcet, secretario de la Academia de Ciencias desde 1776 y hombre de confianza de Turgot, quien escribe un *Essai sur l'application de l'analyse a la probabilité des décisions rendues a la pluralité des voix* que se publica en 1785 y al que, por cierto, Laplace no alude nunca.

das, o si la verdad sobre este punto va en contra de prejuicios heredados, de suerte que quepa apostar más de uno contra uno a que cada votante se apartará de ella, entonces la decisión de la mayoría será probablemente mala y el miedo a este respecto estará tanto más fundamentado cuanto más numerosa sea la asamblea. A la cosa pública le conviene, pues, que las asambleas no tengan que pronunciarse sino sobre cuestiones que estén al alcance de la mayoría, le conviene que la instrucción esté generalizada y que aquellos que están llamados a decidir la suerte de sus asambleas o a gobernarlas se vean inspirados por buenas obras basadas en la razón y la experiencia, que les prevengan de antemano contra las falsas apreciaciones y los prejuicios de la ignorancia. Los sabios tienen muchas ocasiones de observar que las primeras impresiones suelen llevar a engaño y que lo verdadero no siempre es verosímil.

Es difícil distinguir e incluso definir el deseo de una asamblea en medio de la variedad de opiniones de sus miembros. Trataremos de dar algunas reglas al respecto, considerando los dos casos más comunes, que son la elección entre varias proposiciones relativas a un mismo tema.

Cuando una asamblea ha de elegir entre distintos candidatos que se presentan para una o varias plazas del mismo tipo, lo más simple es hacer escribir a cada votante en una papeleta los nombres de todos los candidatos por orden de los méritos que les concede. Suponiendo que los clasifica de buena fe, la simple inspección de tales papeletas permitirá conocer los resultados de las elecciones, cualquiera que sea la forma en que los candidatos sean comparados entre sí, de suerte que nuevas elecciones no pueden enseñar nada más al respecto. Se trata ahora de inferir de aquí el orden de preferencia que las papeletas establecen entre los candidatos. Supongamos que a cada elector se le da una urna conteniendo una infinidad de bolas por medio de las cuales poder matizar todos los grados de mérito de los candidatos; supongamos además que saca de la urna un número de

bolas proporcional a los méritos de cada candidato y que dicho número está escrito en una papeleta al lado del nombre del candidato. Es evidente que, si sumamos en cada papeleta todos los números relativos a cada candidato, aquel que obtenga la suma más elevada será el candidato preferido por la asamblea y que, en general, el orden de preferencia entre los candidatos será el de las sumas relativas a cada uno de ellos. Pero las papeletas no indican el número de bolas que cada elector asigna a cada candidato; lo único que indican es que el primero tiene más que el segundo, el segundo que el tercero, y así sucesivamente. Suponiendo, pues, que el primero tiene en una determinada papeleta un número cualquiera de bolas, todas las combinaciones de los números inferiores que cumplan las condiciones antedichas son igualmente admisibles, y el número de bolas relativo a cada candidato se obtendrá haciendo una suma de todos los números que le asigna cada combinación y dividiéndola por el número total de combinaciones. Si estos números son muy elevados, como es de suponer que ocurra para que puedan expresar toda la gama de méritos, el análisis más elemental permite ver que los números que han de ser escritos en cada papeleta al lado del último nombre, del penúltimo, etc., pueden ser representados por la progresión aritmética 0, 1, 2, etc. Escribiendo, pues, de este modo en cada papeleta los términos de esta progresión y añadiendo los términos relativos a cada candidato en cada papeleta, las diversas sumas indicarán, por su magnitud, el orden de preferencia que debe ser establecido entre los candidatos. Este es el modo de elección indicado por la teoría de probabilidades. No cabe duda de que, si cada elector escribiera en su papeleta los nombres de los candidatos por orden de los méritos que les concede, sería el mejor. Pero tal orden se ve perturbado por intereses particulares y consideraciones ajenas a los méritos que hacen que algunas veces se coloque en el último puesto al rival más temible del candidato preferido por uno, lo cual supone muchas ventajas para los más mediocres. También la experiencia ha

hecho abandonar este modo de elección en las instituciones que lo habían adoptado.

La elección por mayoría absoluta de sufragios une a la certeza de no admitir ninguno de los candidatos que esta asamblea rechazaría, la ventaja de expresar generalmente los deseos de la asamblea. Cuando no hay más que dos candidatos, coincide siempre con el modo anterior. Es cierto que expone al inconveniente de hacer interminables las elecciones, pero la experiencia ha puesto de manifiesto que tal inconveniente no existe, ya que el deseo general de finalizar las elecciones aglutina enseguida la mayoría de los sufragios sobre uno de los candidatos.

La elección entre distintas propuestas relativas al mismo asunto parece que debe sujetarse a las mismas reglas que la elección entre distintos candidatos. Pero entre estas dos cosas hay una diferencia, y es que, mientras que el mérito de un candidato no excluye el de sus rivales, si las propuestas entre las que se ha de elegir son contrarias, la verdad de una excluye la de las otras. Este es el modo como es preciso afrontar en este caso la cuestión.

Demos a cada votante una urna que contenga un número infinito de bolas y supongamos que las distribuye entre las distintas propuestas en razón a las correspondientes probabilidades que les asigna. Es evidente que, dado que el número total de bolas expresa la certeza y que el votante está, por hipótesis, seguro de que una de las propuestas ha de ser correcta, repartirá todo ese número entre las propuestas. El problema se reduce, pues, a determinar las combinaciones en las que se repartirán las bolas, de manera que sobre la primera propuesta haya más que sobre la segunda, sobre ésta más que sobre la tercera, etc., a sumar todos los números de bolas correspondientes a cada propuesta dentro de estas distintas combinaciones y a dividir esta suma por el número de combinaciones; los cocientes serán los números de bolas que se han de atribuir a las propuestas en una papeleta cualquiera. El análisis nos permite ver que, partiendo de la última propuesta para remontarnos a la primera, estos cocientes están entre sí en la misma relación que las cantidades siguientes: 1) la unidad dividida por el número de propuestas; 2) la cantidad anterior incrementada en la unidad dividida por el número de propuestas menos una; 3) esta segunda cantidad incrementada en la unidad dividida por el número de propuestas menos dos, y así sucesivamente. En cada papeleta se escribirán, por tanto, estas cantidades al lado de las propuestas correspondientes y añadiendo en las distintas papeletas las cantidades correspondientes a cada propuesta, estas sumas indicarán por su magnitud el orden de preferencia que la asamblea concede a tales propuestas.

De las ilusiones en la estimación de las probabilidades

El espíritu tiene sus ilusiones lo mismo que el sentido de la vista, y del mismo modo que el tacto corrige las de éste, la reflexión y el cálculo corrigen las de aquél. La probabilidad fundada en la experiencia cotidiana, o exagerada por el temor y la esperanza, nos impresiona más que una probabilidad superior que sólo sea un simple resultado del cálculo. Así, por pequeñas ventajas, no tememos exponer nuestra vida a peligros mucho menos inverosímiles que el que salga un quinterno y, no obstante, nadie querría procurarse las mismas ventajas con la certeza de perder la vida, si saliera dicho quinterno.

Los acontecimientos de los que somos testigos tienen sobre nuestros juicios una influencia que a menudo nos induce a equivocarnos a la hora de apreciar las causas de las que dependen. La viva impresión que nos producen apenas nos deja advertir los acontecimientos contrarios a éstos observados por otros. Nunca son demasiadas las precauciones que se tomen para precaverse contra esta ilusión, una de las fuentes principales de los errores que cometemos.

La coincidencia de algunos acontecimientos extraordinarios con las predicciones de astrólogos, adivinos y agoreros, con los sueños, con los números y días que tienen fama de dichosos o desdichados, ha dado lugar a un cúmulo de prejuicios todavía muy extendidos. No se piensa en el gran número de no-coincidencias que no han causado la menor impresión o que se ignoran. Sin embargo, lo único que puede darnos la probabilidad de las causas a las que se atribuyen las coincidencias es únicamente la relación entre unas y otras. Si se conociera esta relación, la experiencia confirmaría sin lugar a dudas lo que nos dictan el buen sentido y la razón respecto de tales prejuicios. Esta es la razón por la que el filósofo de la antigüedad al que se mostraban, en un templo, para exaltar el poder del dios que allí se adoraba, todos los *ex voto* de aquellos que se habían salvado del naufragio por haberlo invocado, hacía una pregunta conforme al cálculo de probabilidades interesándose por el número de personas que, pese a esta invocación, habían perecido.

Es, sobre todo, en el juego donde un gran cúmulo de ilusiones mantiene la esperanza y la sostiene incluso contra las probabilidades desfavorables. La mayoría de los que juegan a la lotería no saben cuántas probabilidades tienen a su favor y cuántas les son contrarias. Sólo consideran la posibilidad de ganar una gran suma a cambio de una pequeña cifra, y los proyectos que su imaginación maquina exageran a sus ojos la probabilidad de conseguirla. A todos les espantaría, de llegar a conocerlo, el gran número de apuestas que se pierden, sin embargo, se tiene buen cuidado, en cambio, en dar una gran publicidad a las ganancias.

Cuando en la lotería francesa no ha salido un número desde hace mucho tiempo, la gente se apresura a colmarlo de apuestas, creyendo que el número que ha estado durante tanto tiempo sin salir ha de hacerlo en el siguiente sorteo con preferencia sobre los otros. Me parece que este error tan común se debe a una ilusión mediante la cual uno se traslada involuntariamente con

el pensamiento al origen de los acontecimientos. Así, por ejemplo, es muy poco verosímil sacar, en el juego de cara o cruz, *cara* diez veces seguidas. Esta inverosimilitud que sigue sorprendiéndonos todavía, cuando ha salido nueve veces, nos lleva a creer que en la décima jugada saldrá cruz. Pero, lejos de inducirnos a juzgar así, el pasado, al señalar que la moneda tiene una mayor propensión a salir *cara* que a salir *cruz* hace más probable el primero de estos acontecimientos que el segundo, aumentando, como hemos visto, la probabilidad de que salga cara en la jugada siguiente. Una ilusión similar lleva a mucha gente a creer que se puede ganar con absoluta seguridad a la lotería apostando cada vez a un mismo número hasta que salga una cantidad cuyo producto sobrepase la suma de todas las apuestas. Pero ni aun cuando no se vieran detenidas por la imposibilidad de ser sostenidas, podrían semejantes especulaciones disminuir la desventaja matemática de los especuladores y lo que harían sería acrecentar su desventaja moral, ya que en cada jugada expondrían una parte más grande de su fortuna.

La ilusión contraria a éstas lleva en cambio a buscar en los sorteos pasados los números más generalmente premiados para formar con ellos combinaciones sobre las que se cree apostar con ventaja. Pero, dada la forma en que se realiza la mezcla de números en la lotería, el pasado no tiene ninguna influencia sobre el futuro. Las salidas más frecuentes de un número no son más que anomalías del azar: he sometido algunas de ellas al cálculo y me he encontrado con que están comprendidas dentro de los límites que permite admitir con toda verosimilitud la suposición de una misma posibilidad de salida de todos los números.

En una larga serie de acontecimientos del mismo tipo, las simples posibilidades del azar ofrecen a veces estas singulares rachas de dicha o desdicha que la mayoría de los jugadores atribuyen a una suerte de fatalidad. En los juegos que dependen a la vez del azar y de la habilidad de los jugadores es frecuente que el que pierde,

perturbado por su pérdida, trate de repararla con jugadas arriesgadas que no haría en una situación distinta, agravando así su propia desdicha y prolongando la duración de la misma. Sin embargo, es en este caso cuando la prudencia se hace necesaria y cuando conviene convencerse de que la desventaja moral unida a la suerte desfavorable se incrementa con la propia desdicha.

El sentimiento por el que el hombre se ha colocado a sí mismo durante tanto tiempo en el centro del universo, considerándose como objeto de especiales cuidados por parte de la naturaleza, lleva a cada individuo a convertirse en el centro de una esfera más o menos grande y a creer que el azar tiene preferencias hacia él. Animados por esta idea, los jugadores suelen exponer sumas considerables en juegos en los que saben que la suerte les es adversa. Una opinión semejante puede algunas veces tener ciertas ventajas en la forma de vivir, pero lo más frecuente es que lleve a empresas peligrosas y funestas. Aquí, como en todo, las ilusiones del error son contraproducentes y lo único que generalmente resulta útil es la verdad.

Una de las grandes ventajas del cálculo de probabilidades es que enseña a desconfiar de las primeras impresiones. Como cuando se las puede someter a cálculo se ve que generalmente son engañosas, la conclusión que hay que sacar es que en los demás casos sólo se debe confiar en ellas con una gran circunspección. Probémoslo con ejemplos.

Una urna contiene cuatro bolas negras o blancas, pero no todas del mismo color. Se extrae una de esas bolas, de color blanco, y se la vuelve a meter en la urna para proceder de nuevo a otras extracciones. Se desea saber cuál es la probabilidad de no sacar más que bolas negras en las cuatro extracciones siguientes.

Si las bolas blancas y las negras fueran iguales en número, esta probabilidad sería la cuarta potencia de la probabilidad 1/2 de extraer una bola negra en cada extracción; sería, pues, 1/16. Pero el haber sacado una bola blanca en la primera jugada indica una superioridad

en el número de bolas blancas de la urna, pues, si se supone que en la urna hay tres bolas blancas y una negra, la probabilidad de extraer una bola blanca es 3/4; si se supone que hay dos blancas y dos negras, 2/4, y si se supone que hay tres negras y una blanca se reduce a 1/4. Según el principio de la probabilidad de las causas, inferida de los acontecimientos, las probabilidades de estas tres suposiciones están entre sí como las cantidades 3/4, 2/4, 1/4, siendo por consiguiente iguales a 3/6, 2/6, 1/6. Cabe, por tanto, apostar cinco contra uno a que el número de bolas negras es inferior o a lo sumo igual al de bolas blancas. Parece pues que, después de haber extraído una bola blanca en la primera jugada, la probabilidad de extraer cuatro negras seguidas tiene que ser menor que en el caso del equilibrio de colores, esto es, más pequeña que 1/16. Sin embargo, esto no es así, y haciendo un cálculo muy elemental se ve que es mayor que 1/14. En efecto, sería la cuarta potencia de 3/4, 2/4 y 1/4 en la primera, segunda y tercera de las suposiciones anteriores acerca de los colores de las bolas de la urna. Multiplicando respectivamente cada potencia por la probabilidad de la suposición correspondiente, esto es, por 3/6, 2/6 y 1/6, tendremos que la suma de los productos será la probabilidad de extraer cuatro bolas negras seguidas. Tenemos así que esta probabilidad es 29/384, fracción que es menor que 1/14. Esta paradoja se explica teniendo en cuenta que la indicación reflejada en la primera extracción de una superioridad de las bolas blancas sobre las negras no excluye en modo alguno la superioridad de éstas sobre aquellas, superioridad que excluye la suposición del equilibrio de colores. Ahora bien, esta superioridad, aunque poco verosímil, hace que la probabilidad de sacar un número dado de bolas negras seguidas sea mayor que en dicha suposición, si tal número es elevado, y acabamos de ver que esto empieza a ser así cuando el número dado es igual a cuatro.

Consideremos todavía una urna conteniendo varias bolas blancas y negras. Supongamos para empezar que no hay en ella más que una bola blanca y otra negra. En

tal caso, se puede apostar con paridad la extracción de una bola blanca en una jugada. Pero si la urna contuviera tres bolas de las que dos fueran negras, entonces parece que, para la paridad de la apuesta, habría que conceder dos jugadas al que apuesta por la extracción de una bola blanca; habría que concederle tres, si la urna contuviera tres bolas negras y una blanca, y así sucesivamente, de suerte que para compensar con el número de jugadas la disparidad de posibilidades es preciso conceder tantas extracciones cuantas posibilidades contrarias haya. Se supone que, después de cada extracción, la bola extraída es devuelta siempre a la urna. Sin embargo, no resulta difícil ver que esta primera impresión es errónea. En efecto, en el caso de que haya dos bolas negras y una blanca, la probabilidad de extraer dos negras en dos jugadas es la segunda potencia de 2/3, esto es 4/9; pero esta probabilidad, sumada a la de sacar una bola blanca en dos jugadas es la unidad, esto es, la certeza; puesto que es seguro que se tienen que sacar dos bolas negras, o por lo menos una blanca, la probabilidad de este último caso es, pues, 5/9, fracción que es mayor que 1/2. Más ventajoso aún sería apostar por la salida de una bola blanca en cinco jugadas, si la urna contuviera cinco bolas negras y una blanca; tal apuesta sería ventajosa incluso para cuatro jugadas, caso que equivaldría al de sacar un seis en cuatro tiradas con un solo dado.

El caballero de Meré, amigo de Pascal, a quien debemos el nacimiento del cálculo de probabilidades, al haber incitado a este gran geómetra a ocuparse de él, le decía «que había hallado falsedad en los números por la siguiente razón. Si uno se propone obtener un seis con un dado, hay una ventaja como de 671 a 625 en intentarlo en cuatro jugadas. Si uno se propone obtenerlo con dos dados, es desventajoso intentarlo en 24 jugadas. Sin embargo, 24 es a 36, número de caras de dos dados, como 4 es a 6, número de caras de un dado». «He aquí dónde residía», escribía Pascal a Fermat, «su gran escándalo, que le hacía decir abiertamente que las proposiciones no eran constantes y que la aritmética se desmentía... Tiene mucho talento, pero no es un geómetra; esto es, como sabéis, un gran defecto» [33]. El caballero de Meré, llevado por una falsa analogía, creía que en caso de paridad de apuestas, el número de jugadas debía aumentar proporcionalmente al número total de oportunidades posibles, cosa que no es exacta, pero que está tanto más próxima de serlo cuanto mayor es ese número.

Sitúo también en el rango de las ilusiones la aplicación que Leibniz y Daniel Bernoulli han hecho del cálculo de probabilidades en la suma de series. Si la fracción cuyo numerador es la unidad y cuyo denominador la unidad más una variable, se convierte en una serie ordenada respecto a las potencias de dicha variable, no resulta difícil ver que, suponiendo la variable igual a la unidad, la fracción resulta ser 1/2 y la serie,

Más uno, menos uno, más uno, menos uno, etc.

Sumando los dos primeros términos, los dos siguientes, y así sucesivamente, se transforma la serie en otra, cada uno de cuyos términos es cero. Grandi, jesuita italiano, dedujo de aquí la posibilidad de la creación, porque, como la serie es siempre igual a 1/2, él veía nacer esta fracción de una infinidad de ceros, esto es, de la nada. Así fue como Leibniz creyó ver la imagen de la creación en su aritmética binaria, en la que no empleaba más que dos caracteres: el cero y la unidad. El pensó que la unidad podía representar a Dios, y el cero, la nada, y que el Ser Supremo había sacado de la nada todos los seres, de igual modo a como la unidad, junto con el cero, expresa en ese sistema todos los números. Esta idea a Leibniz le gustó tanto que hizo partícipe de

---

33 Carta de Pascal a Fermat del 29 de julio de 1654 (publicada en las *Varia Opera Mathematica Petri de Fermat,* Toulouse, 1692, pp. 179 y sig.). El tema de la correspondencia entre estos dos grandes matemáticos es, como ya hemos visto, la regla de los repartos, cuyo origen está en los dos problemas propuestos a Pascal por el Caballero de Meré. El primero de ellos ya ha salido a relucir antes, mientras que el segundo es el que se está discutiendo aquí.

ella al jesuita Grimaldi, presidente del tribunal de matemáticas de China, en la esperanza de que este emblema de la creación convertiría al cristianismo al que por entonces era emperador, a quien gustaban especialmente las ciencias. Si refiero esto es únicamente para mostrar hasta qué punto los prejuicios de la infancia pueden extraviar a los más grandes hombres.

Llevado por una singular y sutil metafísica, Leibniz consideró que la serie más uno, menos uno, más uno, etcétera, se convierte en la unidad o en el cero, según que nos detengamos en un número par o impar y, como en el infinito no hay razón alguna para preferir uno u otro, siguiendo las reglas de las probabilidades, debemos tomar la mitad de los resultados relativos a esos dos tipos de números, el cero y la unidad, lo que da 1/2 como valor de la serie. Daniel Bernouilli ha ampliado después este razonamiento a la adición de series formadas por términos periódicos. Pero, propiamente hablando, estas series no tienen valores; sólo los toman en el caso de que sus términos se multipliquen por las potencias sucesivas de una variable menor que la unidad. En tal caso, tales series son siempre convergentes, por pequeña que se suponga la diferencia entre la variable y la unidad, y no es difícil demostrar que los valores asignados por Bernauilli, en virtud de la regla de probabilidades, son los mismos valores de las fracciones generatrices de las series, cuando la variable de esas fracciones se supone igual a la unidad. Estos valores son también los límites a los que las series se van aproximando cada vez más a medida que la variable se acerca a la unidad. Pero cuando la variable es exactamente igual a la unidad, las series dejan de ser convergentes, pues no tienen valores más que cuando se las detiene. La enorme coincidencia de esta aplicación del cálculo de probabilidades con los límites de los valores de las series periódicas supone que los términos de dichas series se multiplican por todas las potencias consecutivas de la variable. Pero estas series pueden resultar del desarrollo de una infinidad de fracciones distintas en las que esto no ocurra. Así, la serie más uno, menos uno, más uno, etc., puede nacer del desarrollo de una fracción cuyo numerador es la unidad más la variable y cuyo denominador es dicho numerador incrementado en el cuadrado de la variable. Suponiendo la variable igual a la unidad, tal desarrollo se transforma en la serie propuesta y la fracción generatriz se vuelve igual a 2/3. Las reglas de probabilidades darían, por tanto, en este caso un resultado falso, lo que demuestra lo muy peligroso que sería emplear razonamientos como estos, sobre todo en las ciencias matemáticas, que deben distinguirse siempre por el rigor de sus procedimientos.

De las diversas formas de acercarse a la certeza

La inducción, la analogía, las hipótesis basadas en los hechos y continuamente corregidas por nuevas observaciones, un tacto afortunado donado por la naturaleza y fortalecido por numerosas comparaciones de sus indicaciones con la experiencia, tales son los principales medios para llegar a la verdad.

Si consideramos atentamente una serie de objetos de la misma naturaleza, percibimos entre ellos y en sus cambios relaciones y leyes que se manifiestan cada vez con más claridad a medida que se prolonga la serie y que, al extenderse y generalizarse continuamente, acaban por llevar al principio del que dependen. Pero tales leyes y relaciones se hallan rodeadas a menudo de tantas circunstancias extrañas que se precisa una gran sagacidad para distinguirlas y remontarse a dicho principio: en esto es en lo que consiste el verdadero genio científico. El análisis y la filosofía natural deben sus más importantes descubrimientos a ese fecundo instrumento que llamamos *inducción*. A él le debe Newton su teorema del binomio y el principio de la gravitación universal. Es difícil calcular la probabilidad de sus resultados. La in-

ducción se basa en el hecho de que las relaciones y leyes más elementales son las más comunes, cosa que se verifica en las fórmulas del análisis y con la que nos encontramos en los fenómenos naturales, en la cristalización, y en las combinaciones químicas. Semejante simplicidad de relaciones no nos resultará sorprendente si tenemos en cuenta que todos los efectos de la naturaleza no son otra cosa que los resultados matemáticos de un pequeño número de leyes inmutables.

Sin embargo, la inducción, si bien ayuda a descubrir los principios generales de las ciencias, no basta para establecerlos con rigor. Siempre hace falta confirmarlos con demostraciones o experiencias decisivas, pues la historia de las ciencias nos muestra que la inducción ha llevado algunas veces a resultados inexactos. Citaré, como ejemplo, un teorema de Fermat sobre los números primos. Este gran geómetra que había meditado profundamente sobre su teoría, buscaba una fórmula que, sin incluir más que números primos, diera directamente un número primo mayor que cualquier número asignable. La inducción le condujo a pensar que dos, elevado a una potencia que fuera a su vez una potencia de dos, formaba con la unidad un número primo. Así, por ejemplo, dos elevado al cuadrado, más uno, forma el número primo cinco; dos elevado a la segunda potencia de dos, esto es, a dieciséis, forma con el uno el número primo diecisiete. Vio que esto seguía siendo cierto para la octava y la diesiseisava potencia de dos, incrementada en la unidad, y esta inducción, apoyada en diversas consideraciones aritméticas, le hizo considerar como general este resultado. Sin embargo, confiesa que todavía no lo había demostrado [34]. En efecto, Euler se dio cuenta de que esto deja de ocurrir para la treintaidosava potencia de dos que, aumentada en la unidad, da 4294967297, número divisible por 641.

El canciller Bacon, que con tanta elocuencia promocionó el verdadero método filosófico, hizo un extraño abuso de la inducción para probar la inmovilidad

de la tierra [35]. He aquí cómo razona en el *Novum Organum,* su obra más bella. El movimiento de los astros de oriente a occidente es tanto más rápido cuanto más alejados están de la tierra. Es más rápido para las estrellas, algo más lento para Saturno, algo más aún para Júpiter, y así sucesivamente, hasta llegar a la Luna y a los cometas menos alejados. Sigue siendo perceptible en la atmósfera, sobre todo entre los trópicos, a causa de los grandes círculos que en ella describen las moléculas de aire; es casi insensible para el Océano y es, por tanto, nulo para la Tierra. Pero esta inducción lo único que prueba es que los astros tienen movimientos propios, contrarios al movimiento real o aparente que arrastra a toda la esfera celeste de oriente a occidente, y que estos movimientos parecen más lentos por lo que se refiere a los astros más alejados, cosa que concuerda con las leyes de la óptica. A Bacon hubiera debido llamarle la atención la inconcevible velocidad que es preciso suponer en los astros para cumplir su revolución diurna en la hipótesis de que la tierra esté inmóvil, así como la extraordinaria simplicidad con la que su rotación explica cómo cuerpos tan distantes entre sí como las estrellas y los planetas parecen, sin embargo, sujetos a dicha revolución. En cuanto al océano y a la atmósfera, no debía haber asimilado su movimiento al de los astros, que están separados de la Tierra, al contrario de lo que ocurre con el aire y el mar que al formar parte del globo terrestre, han de participar de su movimiento o de su reposo. Es extraño que este filósofo, dado por naturaleza a las más grandes concepciones, no

---

[34] En una carta fechada el 29 de agosto de 1654, Fermat afirma, en efecto, estar seguro de la verdad de que para $n = 0, 1, 2, 3, 4...$, los valores correspondientes a $2^{2^n} + 1$ son números primos y generaliza este resultado, aunque reconoce que no lo ha demostrado. Euler es el primero en señalar que este resultado no es válido para todos los números, como creía Fermat.

[35] En efecto, Bacon trata este problema en el aforismo XXXVI del libro II del *Novum Organum,* en donde pone este ejemplo para ilustrar con él lo que entiende por «hecho crucial», así como su funcionamiento en la investigación científica.

se haya sentido atraído por la majestuosa idea que el sistema de Copérnico ofrece del universo. Hubiera podido, sin embargo, haber encontrado en favor de este sistema grandes analogías en los descubrimientos de Galileo, que sí le eran conocidos. Dio el precepto para la búsqueda de la verdad, pero no el ejemplo. Sin embargo, aunque las ciencias no le deben ningún descubrimiento, con su continua insistencia, asistida de toda la fuerza de la razón y la elocuencia, en la necesidad de abandonar las insignificantes sutilezas de la escolástica para dedicarse a la experiencia y a la observación, ha contribuido, no obstante, a los inmensos progresos realizados por el espíritu humano en el bello siglo en que le tocó vivir.

La analogía se basa en la probabilidad de que cosas similares tengan causas del mismo género y produzcan los mismos efectos. Cuanto más perfecta es la similitud, mayor esta probabilidad. Así, consideramos indudable que seres provistos de los mismos órganos, que ejecutan las mismas cosas y se comunican entre sí, experimentan las mismas sensaciones y son movidos por los mismos deseos. La probabilidad de que los animales, cuyos órganos son parecidos a los nuestros, tengan sensaciones parecidas a las nuestras sigue siendo muy grande, aunque un poco inferior a la relativa a los individuos de nuestra especie, y se ha necesitado toda la influencia de los prejuicios religiosos para hacer pensar a algunos filósofos que los animales no son más que puros autómatas. La probabilidad de la existencia de sentimiento decrece a medida que disminuye la similitud entre sus órganos y los nuestros, pero es siempre muy grande, incluso por lo que respecta a los insectos. Viendo a los seres de una misma especie ejecutar cosas muy complicadas de una forma exactamente idéntica a través de generaciones, y sin haberlas aprendido, tendemos a creer que actúan por una suerte de afinidad, análoga a la que mantiene unidas las moléculas de los cristales, pero que, al mezclarse con el sentimiento vinculado a toda organización animal, produce, con la regularidad de las combinaciones químicas, combinaciones mucho más singulares. Podríamos denominar *afinidad animal* a esta mezcla de afinidades electivas y sentimiento. Aunque hay muchas analogías entre la organización de las plantas y la de los animales, no me parece, sin embargo, suficiente para extender a los vegetales la facultad de sentir, aunque tampoco haya nada que autorice a negársela.

Como el sol, con la acción benefactora de su luz y su calor, permite el desarrollo de los animales y plantas que cubren la tierra, pensamos por analogía que produce efectos similares en otros planetas; pues no es natural pensar que la materia, cuya actividad vemos desarrollarse en tantas formas, sea estéril en un planeta tan grande como Júpiter que, como el globo terrestre, tiene sus días, sus noches y sus años, y en el cual las observaciones indican cambios que suponen fuerzas muy activas. Pero, inferir de aquí la semejanza entre los habitantes de los planetas y de la tierra sería llevar demasiado lejos la analogía. El hombre, hecho para la temperatura de que goza y para el elemento que respira, no podría, según todas las apariencias, vivir en los demás planetas. Pero ¿no ha de haber acaso una infinidad de organizaciones relativas a las diversas constituciones de los globos de este universo? Si la mera diversidad de elementos y climas produce tanta variedad en las manifestaciones terrestres, cuánto más no han de diferir las de los distintos planetas y satélites. Ni la imaginación más activa puede formarse siquiera una idea de ellas, pero su existencia es muy verosímil.

La enorme analogía entre ellos nos lleva a considerar las estrellas como otros tantos soles dotados, igual que el nuestro, de un poder de atracción directamente proporcional a la masa e inversamente al cuadrado de las distancias; pues, al haberse comprobado su existencia para todos los cuerpos del sistema solar y para las más insignificantes moléculas de los mismos, ese poder parece pertenecer a toda la materia. Así parecen indicarlo ya los movimientos de las pequeñas estrellas llamadas

dobles a causa de su aproximación; un siglo a lo sumo de observaciones precisas constatando sus movimientos de revolución de unas en torno a las otras pondrá fuera de duda sus atracciones recíprocas.

La analogía que nos lleva a hacer de cada estrella el centro de un sistema planetario es mucho más débil que la anterior, pero adquiere verosimilitud por la hipótesis que hemos propuesto sobre la formación de las estrellas y el sol, pues en ella cada estrella habría estado en un principio rodeada, al igual que el sol, de una amplia atmósfera a la que es natural suponerle los mismos efectos que a la atmósfera solar y suponer que al condensarse ha producido planetas y satélites.

El método más seguro de cuantos puedan guiarnos en la búsqueda de la verdad, consiste en elevarse, mediante la inducción, de los fenómenos concretos a relaciones cada vez más amplias hasta llegar por último a la ley general de la que derivan. A continuación se verifica esta ley, bien mediante experiencias directas, cuando es posible, bien considerando si concuerda con los fenómenos conocidos, y, si mediante una análisis riguroso, se ve que todos ellos se desprenden de esta ley, hasta en sus menores detalles y si, además, dichos fenómenos son muy numerosos y variados, entonces la ciencia adquiere el grado de certeza más elevado que pueda alcanzar. Esto es lo que le ha ocurrido a la astronomía con el descubrimiento de la gravitación universal. Pero la historia de las ciencias nos permite ver que esta lenta y penosa marcha de la inducción no ha sido siempre la de los inventores. La imaginación, impaciente por remontarse a las causas, se complace en crear hipótesis y a menudo deforma los hechos para plegarlos a su labor: en tales casos, las hipótesis son peligrosas. Pero cuando sólo se las considera como medios para conectar entre sí los fenómenos a fin de descubrir sus leyes, cuando, procurando no atribuirles realidad, se las rectifica continuamente con ayuda de nuevas observaciones, entonces pueden llevarnos a las causas verdaderas o, por lo menos, ponernos en condiciones de inferir de los fenómenos observados

aquellos que, dadas las circunstancias, han debido originarlos.

Si se sometieran a prueba todas las hipótesis que se pueden formar acerca de la causa de los fenómenos, se acabaría llegando por exclusión a la verdadera. Este medio ha sido empleado con éxito. Pero algunas veces ha ocurrido que se ha llegado a varias hipótesis que explicaban igual de bien todos los hechos conocidos y los sabios se han repartido entre ellas hasta que observaciones decisivas han hecho conocer la verdadera. En tales casos, es interesante para la historia del espíritu humano volver sobre estas hipótesis, ver de qué modo lograban explicar un gran número de hechos y analizar los cambios que han debido experimentar para transformarse en la de la naturaleza. Así es como el sistema de Ptolomeo, que no es sino la realización de las apariencias celestes, se transforma en la hipótesis del movimiento de los planetas en torno al sol, haciendo iguales y paralelos a la órbita solar los círculos y los epiciclos que Ptolomeo les hace describir anualmente y cuyo tamaño deja indeterminado. Para convertir esta hipótesis en el verdadero sistema del mundo, basta con trasladar luego a la tierra en sentido contrario el movimiento aparente del sol.

Es casi siempre imposible someter al cálculo la probabilidad de los resultados obtenidos por estos diversos medios; esto es lo que ocurre de igual modo con los hechos históricos. Pero, algunas veces, el conjunto de fenómenos explicados y de testimonios es tal que, aunque no se pueda calcular su probabilidad, uno no puede tampoco razonablemente permitirse ninguna duda al respecto. En los demás casos, lo prudente es no admitirlos más que con muchas reservas.

Reseña histórica sobre el cálculo de probabilidades

Desde hace ya tiempo se vienen determinando en los juegos más simples las relaciones de las posibilidades favorables o contrarias a los jugadores, regulándose de

acuerdo con tales relaciones las posturas y las apuestas. Pero antes de Pascal y de Fermat, nadie había establecido principios y métodos para someter este problema al cálculo ni había resuelto cuestiones de este género un poco complicadas. Es, pues, a estos dos grandes geómetras a los que hay que atribuir los primeros elementos de la ciencia de las probabilidades, cuyo descubrimiento puede ser colocado a la altura de las cosas destacadas que han ilustrado el siglo diecisiete, que es el siglo que más honor ha hecho al espíritu humano. El principal problema que los dos resolvieron por vía distinta consiste, como hemos visto antes, en repartir equitativamente la apuesta entre jugadores de la misma destreza y que convienen en abandonar una partida antes de que finalice, siendo la condición del juego que, para ganar la partida, es preciso conseguir el primero un determinado número de puntos. Es evidente que el reparto debe hacerse proporcionalmente a las respectivas probabilidades de los jugadores de ganar la tal partida, las cuales dependen de los números de puntos que todavía les falten. El método de Pascal es muy ingenioso y en el fondo no es más que el empleo de la ecuación en diferencias parciales relativas a ese problema con el fin de determinar las probabilidades sucesivas de los jugadores, yendo de los números más pequeños a los siguientes. Este método está restringido al caso de dos jugadores: el de Fermat, basado en las combinaciones, se extiende a un número cualquiera de ellos. Pascal creyó en un principio que debía estar, como el suyo, restringido a dos jugadores, cosa que motivó una discusión entre ellos, al final de la cual Pascal reconoció la generalidad del método de Fermat.

Huyghens reunió los diversos problemas que ya habían sido resueltos junto con algunos otros en un pequeño tratado que es el primero que apareció sobre este tema y que lleva por título *De Ratiociniis in ludo aleae* [36].

[36] Esta obra, editada por N. Bernouilli, constituye el primer intento de sistematización de la teoría de probabilidades y es el más importante hasta la aparición de los realizados por J. Bernouilli, Montmort y De Moivre.

Posteriormente, se ocuparon de ellos varios geómetras: Huddes y el pensionista Witt, en Holanda, y Halley en Inglaterra, aplicaron el cálculo a las probabilidades de la vida humana [37]; y Halley publicó a este respecto la primera tabla de mortalidad. Por la misma época, Jacques Bernoulli propuso a los geómetras diversos problemas de probabilidad cuyas soluciones ofreció después. Por último, compuso su bella obra titulada *Ars Conjectandi,* que no apareció hasta seis años después de su muerte, acaecida en 1706 [38]. En esta obra se profundiza mucho más en la teoría de las probabilidades que en la de Huyghens; el autor ofrece en ella una teoría general de las combinaciones y las series y la aplica a ciertas cuestiones difíciles relativas al azar. Esta obra es notable también por lo atinado y sutil de sus concepciones, por el empleo de la fórmula del binomio en este género de cuestiones y por la demostración del teorema que expresa que, multiplicando indefinidamente las observaciones y las experiencias, la relación de los acontecimientos de diversa naturaleza que han de ocurrir se aproxima a la de sus posibilidades respectivas dentro de límites cuyo intervalo se va estrechando cada vez más, llegándose a

[37] Del pensionista de Witt tenemos noticia por la correspondencia entre Leibniz y Jacques Bernouilli (*Leibnizens Mathematische Schriften Herausgergeben von C. I. Gerhard.* Halle, 1855), donde este último le habla de él al primero. En cuanto a Halley, publica en las *Philosophical Transactions* de 1693, una memoria titulada *An Estimate of the Degrees of The Mortality of Manking, drawn from curious tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw.*

[38] El *Ars Conjectandi* de J. Bernouilli se publicó en 1713 con un prefacio de su sobrino Nicolás y una disertación en francés titulada *Lettre à un ami sur les parties du jeu de Paume.* La obra está dividida en cuatro partes. La primera contiene una reimpresión y un comentario de la obra de Huygens, la segunda está dedicada a la teoría de las combinaciones y permutaciones; la tercera consiste en la solución a diversos problemas relativos a los juegos de azar y, por último, la cuarta es una aplicación de la teoría de la probabilidad a problemas de economía y moral.

hacer menor que cualquier cantidad asignable. Este teorema es muy útil para determinar, mediante las observaciones, las leyes y causas de los fenómenos. Bernoulli confería, con razón, una gran importancia a su demostración en la que dijo haber meditado durante veinte años.

Durante el intervalo entre la muerte de Jacques Bernouilli y la publicación de su obra, Montmort y Moivre publicaron dos tratados sobre el cálculo de probabilidades. El de Montmort lleva por título *Essai sur les Jeux de hasard* y contiene numerosas aplicaciones de dicho cálculo a los diversos juegos. El autor le añadió, en la segunda edición, algunas cartas en las que Nicolás Bernouilli propone ingeniosas soluciones a algunos difíciles problemas de probabilidad. El tratado de Moivre, posterior al de Montmort, apareció primero en las *Transactions Philosophiques* del año 1711 [39]. Más tarde, el autor lo publicó independientemente y lo sometió a sucesivas correcciones en las tres ediciones que hizo de él. Esta obra está fundamentada principalmente sobre la

[39] De la obra de Montmort, discípulo y amigo del filósofo Malebranche, hay dos ediciones, la primera de 1708 y la segunda de 1714. La obra se halla dividida en cuatro partes, la primera de las cuales contiene una teoría de las combinaciones, la segunda y la tercera discuten ciertos juegos de azar y la última incluye la solución a diversos problemas, entre otros, los cinco que Huygens había planteado. Montmort pensaba que la primera edición de su obra contenía ya implícitamente todo lo que De Moivre iba a desarrollar en la suya. Sin embargo, parece fuera de toda duda que el talento matemático de este último fue muy superior al de aquél (se cuenta que, en los últimos años de su vida, a ciertas personas que le interrogaban por algunos aspectos matemáticos de su obra, Newton les respondió: «Pregunten a Mr. De Moivre, él conoce esas cosas mejor que yo»). Su primera obra, *De mensura Sortis,* publicada inicialmente como memoria en la *Philosophical Transactions* de 1711, fue publicada más tarde por separado con el título de *The Doctrine of Chances or a Method of Calculating the Probabilites of Events in Play.* Sus aportaciones al tema de la duración del juego, su teoría de las series recurrentes y su extensión del teorema de Bernouilli con ayuda de el de Stirling hacen que su obra sea considerada como la más importante hasta la de Laplace.

fórmula del binomio y los problemas que contiene tienen, como su solución, una gran generalidad. Pero lo que la distingue es la teoría de las series recurrentes y su uso en este campo. Esta teoría consiste en la integración de las ecuaciones lineales de diferencias finitas con coeficientes constantes, integración a la que Moivre llega de una manera muy afortunada. Como siempre es interesante conocer el camino recorrido por los inventores, voy a exponer el de Moivre en lo que se refiere a una serie recurrente cuya relación entre tres términos consecutivos viene dada. El empieza considerando la relación entre los términos consecutivos de una progresión geométrica, esto es, la ecuación de dos términos que la expresa. Poniéndola en relación con los términos inferiores de una unidad, la multiplica en este estado por un factor constante y resta el producto de la ecuación primitiva. De este modo, obtiene una relación entre tres términos consecutivos de la progresión geométrica. A continuación, considera Moivre una segunda progresión geométrica en la que la razón de los términos es el mismo factor que acaba de emplear. Reduce, asimismo, en una unidad el índice de los términos en la ecuación de esta nueva progresión; la multiplica luego por la razón de los términos de la primera progresión y resta de la ecuación primitiva el producto, lo que le da una relación entre tres términos consecutivos de la segunda progresión, completamente similar a la que ha hallado para la primera progresión. Después observa que, si se suman término a término las dos progresiones, se mantiene la misma relación entre tres cualesquiera de estas sumas consecutivas. Compara los coeficientes de esta relación con los de la relación de los términos de la serie recurrente propuesta y halla, para determinar las relaciones de los términos consecutivos de las dos progresiones, una ecuación de segundo grado cuyas raíces son dichas relaciones. De este modo, Moivre descompone la serie recurrente en dos progresiones geométricas multiplicadas cada una de ellas por una constante arbitraria que determina mediante los dos primeros términos de la serie recurrente.

Este procedimiento es exactamente el mismo que luego ha empleado Lagrange para la integración de las ecuaciones lineales de diferencias con coeficientes constantes.

Muy poco tiempo antes de estas investigaciones de Moivre, Taylor había establecido en su excelente obra titulada *Methodus incrementorum,* la manera de integrar la ecuación lineal de diferencias de primer orden con un coefiicente variable y un último término función sólo del índice. Es, pues, a estos dos grandes geómetras a quienes debemos la consideración y la integración de este tipo de ecuaciones. En realidad, las relaciones de los términos consecutivos de las progresiones aritméticas y geométricas no son sino los casos más simples de las ecuaciones lineales de diferencias. Pero no se las había considerado bajo este punto de vista, que es uno de aquellos que refiriéndose a teorías generales han llevado a dichas teorías, y constituyen por ello verdaderos descubrimientos.

Moivre ha retomado en su obra el teorema de Jacques Bernouilli sobre la probabilidad de los resultados dados por un gran número de observaciones. No se conforma con hacer ver, como Bernouilli, que la relación de los acontecimientos que deben ocurrir se aproxima incesantemente a la de sus posibilidades respectivas, sino que además ofrece una elegante y sencilla expresión de la probabilidad de que la diferencia de esas dos relaciones esté contenida dentro de ciertos límites. Para ello determina la relación entre el término mayor del desarrollo de una potencia muy elevada del binomio y la suma de todos sus términos y el logaritmo hiperbólico del exceso de ese término sobre los que están muy próximos a él. Al ser entonces el término mayor el producto de un número considerable de factores, su cálculo numérico resulta impracticable. Para obtenerlo mediante una aproximación convergente, Moivre se sirvió de un bello teorema de Stirling sobre el término medio del binomio elevado a una alta potencia, que es un importante teorema, sobre todo porque introduce la raíz cuadrada de la relación de la circunferencia con el radio en

una expresión que parece que ha de ser extraña a esta trascendencia. También a Moivre le extrañó particularmente este resultado, uno de los más curiosos y útiles del análisis de series.

Varios sabios, entre los cuales hay que destacar a Deparcieux, Kersseboom, Wargentin, Dupré de Saint-Maure, Simpson, Sulmich, Price y Duvillard, han reunido un gran número de interesantes datos acerca de los nacimientos, los matrimonios y la mortalidad. Han ofrecido fórmulas y tablas relativas a rentas vitalicias, tontinas, seguros, etc. Pero en esta corta reseña no puedo hacer otra cosa que señalar estos interesantes trabajos, para centrarme en las ideas originales. Entre éstas, está la distinción entre las esperanzas matemática y moral, así como el ingenioso principio establecido por Daniel Bernouilli para someter ésta al análisis. También está la afortunada aplicación que hizo del cálculo de probabilidades a la inoculación. Pero entre estas ideas originales hemos de incluir sobre todo la consideración directa de las probabilidades de los acontecimientos, inferidas de los acontecimientos observados. Jacques Bernouilli y Moivre supusieron conocidas estas posibilidades y buscaron la probabilidad de que el resultado de los experimentos a realizar se aproxime cada vez más a su representación. Bayes, en las *Transactions Philosophiques* del año 1763, buscó directamente la probabilidad de que las posibilidades indicadas por las experiencias ya hechas se hallen comprendidas dentro de ciertos límites y la obtuvo de una forma sutil y muy ingeniosa, aunque un poco confusa. Esta cuestión está relacionada con la teoría de la probabilidad de las causas y de los acontecimientos futuros, inferida de los acontecimientos observados, teoría cuyos principios expuse yo algunos años atrás, con la observación de la influencia de las desigualdades que pueden existir entre posibilidades que se suponen iguales. Aunque se ignore cuáles son los acontecimientos simples que estas desigualdades favorecen, sin embargo, a veces esta ignorancia incrementa incluso la

probabilidad de los acontecimientos compuestos. La generalización del análisis y de los problemas relativos a las probabilidades me llevó al cálculo de las diferencias finitas parciales que luego Lagrange ha tratado mediante un método muy simple y del que ha hecho elegantes aplicaciones a este tipo de problemas. La teoría de las funciones generatrices, que establecí por la misma época, abarca éstos entre otros asuntos, y se adapta por sí misma y con la mayor generalidad a las cuestiones de probabilidad más difíciles. Además, mediante aproximaciones muy convergentes, determina los valores de las funciones compuestas de gran número de términos y de factores, y al hacer ver que la raíz cuadrada de la relación de la circunferencia y el radio entra a menudo dentro de estos valores, muestra que pueden introducirse igualmente infinidad de otras transcendentes.

Varios sabios geómetras han aplicado el cálculo de probabilidades a los votos y a las decisiones de las asambleas electorales y deliberantes, pero hasta ahora estas investigaciones no han ofrecido ningún resultado demasiado destacable sobre estas cuestiones a las que enturbian tantas pasiones e intereses diversos como tan a menudo agitan las asambleas. Una de las aplicaciones más útiles del cálculo de probabilidades concierne a los términos medios que han de elegirse entre los resultados de las observaciones. Varios geómetras se han ocupado de ella y Lagrange ha publicado en las *Mémoires* de Turín un bello medio para determinar dichos términos cuando se conoce la ley de los errores de las observaciones. En relación con este mismo tema, he ofrecido un método que se basa en un artificio singular que se puede emplear con ventaja en otras cuestiones de análisis y que, al permitir extender indefinidamente a todo el curso de un largo cálculo las funciones que deben estar limitadas por la naturaleza del problema, indica las modificaciones a que ha de someterse cada término del resultado final en virtud de dichas limitaciones. Pero estos métodos suponen conocida la ley de los errores de las observaciones, cosa que no es el caso. Afortunadamente, he averiguado que si las observaciones son numerosas, la búsqueda de los valores medios que han de elegirse resulta independiente de esta ley. Antes hemos visto que cada observación proporciona una ecuación de condición de primer grado, que siempre puede ser dispuesta de forma que todos sus términos estén en el primer miembro siendo cero el segundo. El empleo de estas ecuaciones es una de las causas principales de la gran precisión de nuestras tablas astronómicas, puesto que con ellas se ha podido hacer concurrir un gran número de excelentes observaciones en la determinación de sus elementos. Para el caso de que no haya más que un elemento que determinar, Cotes había prescrito preparar las ecuaciones de condición de tal suerte que el coeficiente del elemento desconocido fuera positivo en cada una de ellas, y sumar luego todas ellas para formar una ecuación final de la que poder inferir el valor de dicho elemento. La regla de Cotes fue seguida por todos los calculistas. Pero cuando hacía falta determinar varios elementos, no había ninguna regla fija para combinar las ecuaciones de condición con objeto de poder obtener las ecuaciones finales necesarias; lo único que se hacía era elegir, para cada elemento, las observaciones más adecuadas para determinarlo. Fue para evitar estos tanteos para lo que Legendre y Gauss concibieron la idea de sumar los cuadrados de los primeros miembros de las ecuaciones de condición y de convertir dicha suma en un *minimum* por el procedimiento de hacer variar en ella cada elemento desconocido; de este modo, se pueden obtener directamente tantas ecuaciones finales como elementos haya. Pero ¿merecen los valores determinados mediante estas ecuaciones preferencia sobre todos los que se pueden obtener por otros medios? Esto es algo que sólo el cálculo de probabilidades podía mostrar. Lo apliqué, pues, a este importante asunto y me vi llevado por un minucioso análisis a la regla que acabo de indicar, la cual, a la ventaja de permitir conocer por un procedimiento regular los elementos buscados, une la de conferirles los valores más ventajosos, es decir, aquellos con

los que no hay que temer más que los errores más pequeños posibles.

He reunido todos estos temas en la obra que he publicado con el título *Théorie analytique des Probabilités,* y en la que me he propuesto exponer de la forma más general los principios y el análisis del cálculo de probabilidades, así como las soluciones a los problemas más difíciles e interesantes que presenta este cálculo.

Se ve por este *Ensayo* que la teoría de las probabilidades, en el fondo, no es otra cosa que el buen sentido reducido a cálculo [40]; permite apreciar con exactitud aquello que los espíritus justos barruntan por una especie de instinto, sin que generalmente puedan darse cuenta de ello. Si consideramos los métodos analíticos a que esta teoría ha dado lugar, la verdad de los principios que le sirven de base, la minuciosa y sutil lógica que exige su empleo para la solución de los problemas, las instituciones de utilidad pública que se apoyan en ella y la extensión que ha recibido y que puede recibir todavía con su aplicación a las más importantes cuestiones de la filosofía natural y de la economía política; si además observamos que, en aquellas otras cosas que no pueden ser sometidas al cálculo, nos ofrece las aproximaciones más seguras que puedan guiarnos en nuestros juicios y que nos enseña a librarnos de las ilusiones que a menudo nos engañan, veremos que no hay ciencia más digna de nuestras reflexiones y cuyos resultados sean más útiles.

[40] Esta frase ha dado pie a algunos a afirmar que Laplace consideraba el cálculo de probabilidades como una rama de la lógica. Este es, por ejemplo, el caso de G. Polya, quien escribe: «No puede ignorarse el hecho histórico de que el cálculo de probabilidades fue considerado por Laplace y muchos otros eminentes científicos como la expresión de las reglas de la inferencia plausible» (*Patterns of Plausible inferance,* 1954).

Introducción 9

Ensayo filosófico sobre las probabilidades 23

De la probabilidad 24

Principios generales del cálculo de probabilidades 31

De la esperanza 45

De los métodos analíticos del cálculo de probabilidades 50

Aplicaciones del cálculo de probabilidades
De los juegos 67

De las desigualdades que pueden existir entre posibilidades supuestamente iguales 68

De las leyes de probabilidad que resultan de la multiplicación indefinida de acontecimientos 71

Del cálculo de probabilidades aplicado a la investigación de los fenómenos y de sus causas 81

De los medios que es preciso elegir entre los resultados de un gran número de observaciones 96

De las tablas de mortalidad, de la duración media de la vida, de los matrimonios y de asociaciones cualesquiera 101

De los beneficios que dependen de la probabilidad de los acontecimientos 109

De las elecciones y de las decisiones de las asambleas 113

De las ilusiones en la estimación de las probabilidades 116

De las diversas formas de acercarse a la certeza 124

Reseña histórica sobre el cálculo de probabilidades 131